DS 2 Corrigé.

La rédaction, l'argumentation et la présentation matérielle entrent dans une part significative de la notation; vous devrez aussi respecter la terminologie et les règles d'usage en vigueur. Les exercices, problèmes sont indépendants. Les résultats numériques seront encadrés et simplifiés. Si vous êtes amené à repérer ce qui peut vous sembler une erreur d'énoncé, vous êtes prié de le signaler sur votre copie et devrez poursuivre votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous prendriez.

Calculatrices autorisées.

1 Exercice

i) La série étant à termes > 0, on peut envisager la règle préconisée; comme pour tout n : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \to \dfrac{27}{a^3}$ si $n \to \infty$, on a convergence de $\sum u_n$ pour $a > 3$ et divergence pour $a < 3$. Donc pour $a \neq 3$ la nature de la série est élucidée et on ne peut traiter le cas restant $a = 3$ avec la règle de d'Alembert.
ii) La formule de Stirling donne pour $n \to \infty$: $u_n \sim \dfrac{\sqrt{3}}{2\pi n}$. Il y a donc divergence.

2 (Problème 1 : Produits infinis)

1) (u_n) étant une suite à termes non nuls , $\dfrac{P_{n+1}}{P_n}$ est défini pour tout n et , parce que (P_n) converge vers une limite finie L , on a aussi $P_{n+1} \to L$ et , par opérations sur les limites , L étant non nul par hypothèse , $\dfrac{P_{n+1}}{P_n} \to \dfrac{L}{L} = 1$. Or $\dfrac{P_{n+1}}{P_n} = u_{n+1}$,pour tout n , donc $\boxed{u_{n+1} \to 1}$ ou (u_n) converge vers 1.
2) Pour $n \geq 1$: $P_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(1 + \frac{1}{k}) = \prod_{k=1}^{n}(\frac{k+1}{k}) = \frac{(n+1)!}{n!} = n + 1$; la suite (P_n) tend vers $+\infty$ donc par définition le produit infini $\boxed{\text{diverge}}$. La condition du 1) n'est donc que nécessaire puisque, dans 2) le produit infini diverge alors que son terme général converge vers 1.
3) Pour $n \geq 2$: $P_n = \displaystyle\prod_{k=2}^{n}(1 - \frac{1}{k^2}) = \prod_{k=2}^{n}(\frac{k^2-1}{k^2}) = \frac{(n-1)!}{n!} \times \frac{(n+1)!}{2n!} = \frac{n+1}{2n} \to \frac{1}{2}$. En conséquence le produit infini $\boxed{\text{converge}}$ et, par définition, $\boxed{\displaystyle\prod_{n=2}^{\infty}(1 - \frac{1}{n^2}) = \frac{1}{2}}$.

4) L'emploi du ln est légitimé par le fait que (u_n) est à termes >0 , de plus : $\forall n \geq n_0, \ln(P_n) = \displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} \ln(u_k) \overset{def}{=} S_n$.
i) Si $\prod u_n$ converge, cela signifie que : $\exists L > 0,\ P_n \to L$, ce fait entraîne, par composition des limites, $\exists L > 0, S_n \to \ln L$ donc $\displaystyle\sum_{n \geq n_0} \ln u_n$ converge , ce par définition.
ii) Si $\displaystyle\sum_{n \geq n_0} \ln u_n$ converge, $\exists L \in \mathbb{R}, S_n \to L$ donc, par composition des limites, $\exp(S_n) = P_n \to \exp(L)$ qui est un réel non nul. Il en résulte que $\prod u_n$ converge.
L'équivalence est bien prouvée.
5)a) Par 4) $\prod(1 + u_n)$ converge $\Leftrightarrow \sum \ln(1 + u_n)$ converge. Pour que cette série converge il est bien sûr nécessaire que $\ln(1 + u_n) \to 0$ donc que $u_n \to 0$. et comme $\ln(1 + u_n) \sim u_n$, par comparaison des séries à TP , $\sum u_n$ converge . Autrement dit : $\sum \ln(1 + u_n)$ converge $\Rightarrow \sum u_n$ converge . Inversement si $\sum u_n$ converge ,alors $u_n \to 0$. et $\ln(1 + u_n) \sim u_n$ donc , par le même théorème, $\sum \ln(1 + u_n)$ converge. Au final , l'équivalence à prouver est démontrée.

La question 2) montre que pour $u_n = \frac{1}{n}$, $\prod(1+u_n)$ diverge donc, par ce qui précède, $\sum \frac{1}{n}$ diverge.
b) Le 4) montre que $\prod(1-u_n)$ converge $\Leftrightarrow \sum \ln(1-u_n)$ converge. Puis par le même raisonnement que celui utilisé en a) mais avec des séries à termes négatifs , on obtient la même conclusion.
6) a) $\sum_{n\geq 2} \frac{2}{n(n+1)}$ converge par simple comparaison avec une série de Riemann donc via 5)b) $\prod \left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right)$ converge .
b) Ce produit converge ssi $\sum -\frac{1}{n}+\ln(1+\frac{1}{n})$ converge par 4). Comme $-\frac{1}{n}+\ln(1+\frac{1}{n}) \sim -\frac{1}{2n^2}$,il s'ensuit , par comparaison des séries à termes de signe constant , que $\sum -\frac{x}{n}+\ln(1+\frac{x}{n})$ converge et qu'il en va de même du second produit infini.
7) a) La nature du produit infini est celle par 5)b de $\sum \ln(u_n)$, comme $u_n \to 1$: $\ln(u_n) \sim u_n - 1 \sim -\frac{a^2}{2^{2n+1}}$, ce par ce que $\cos x - 1 \sim -\frac{x^2}{2}$ si $x \to 0$. Par ailleurs $\frac{a^2}{2^{2n+1}} = \frac{a^2}{2}(\frac{1}{4})^n$, et la série géométrique $\sum (\frac{1}{4})^n$ convergeant, on en déduit, par comparaison, que la série, à termes négatifs, $\sum \ln(u_n)$ converge donc $\boxed{\prod u_n \text{ converge.}}$
b) Pour tout $n \geq 1$: $P_n \sin(\frac{a}{2^n}) = P_{n-1}\frac{1}{2}\sin\left(\frac{a}{2^{n-1}}\right)$ donc la suite $\left(P_n \sin(\frac{a}{2^n})\right)$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$; il en résulte que $P_n \sin\left(\frac{a}{2^n}\right) = 2^{-n-1}\sin(2a)$. Mais comme $\frac{a}{2^n} \to 0, \sin\left(\frac{a}{2^n}\right) \sim \frac{a}{2^n} \Rightarrow P_n \sim \frac{\sin(2a)}{2a} \neq 0$ car $0 < 2a < \pi$. Ainsi $\boxed{\prod u_n \text{ converge.}}$ De plus $\boxed{\prod_{n=0}^{\infty} \cos\left(\frac{a}{2^n}\right) = \frac{\sin(2a)}{2a}}$.
8) Le texte d'Euler suggère l'approche suivante : pour tout $N \geq 1$, $\prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k}} \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$, puisque tous les entiers naturels non nuls $\leq N$ n'ont dans leurs facteurs premiers que les $p_k, 1 \leq k \leq N$.
La divergence de la série harmonique entraîne celle du produit infini $\prod_{k\geq 1} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}$. Comme la nature de ce dernier est aussi celle (cf DS1, par passage au ln), de $\sum \ln \frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}$ soit celle de $\sum \frac{1}{p_k}$, en admettant que la suite $\left(\frac{1}{p_k}\right)$ converge vers 0. Si ce n'était pas le cas, la divergence n'en serait que plus flagrante.

3 Gauss

1)2)3) sont des questions de cours.
4) $\frac{1}{n}f^2 \overset{def}{=} \theta$ vérifie $\theta^2 = id_E$ donc $E = Ker\,(\theta - id_E) \oplus Ker\,(\theta + id_E)$; comme $Ker\,(\theta \pm id_E) = Ker\,\left(f^2 \pm n id_E\right)$, le résultat en découle.
5) Simple application de 3).
6) Pour tout $x \in F, \frac{1}{n}\varphi^2(x) = \frac{1}{n}f^2(x) = x$, par définition de F donc $\frac{1}{\sqrt{n}}\varphi$ est une symétrie de F. Par conséquent $F = Ker\,(\theta + id_F) \oplus Ker\,(\theta - id_F)$; si $x \in Ker\,(\theta + id_F)$ alors $\theta(x) = -x$ donc $\frac{1}{\sqrt{n}}f(x) = -x$ ou $x \in Ker(f + \sqrt{n}id_E)$. Inversement si $x \in Ker(f+\sqrt{n}id_E)$ alors $f(x) = -\sqrt{n}x$ donc, en appliquant à nouveau $f, f^2(x) = -\sqrt{n}f(x) = nx$ soit $x \in Ker(f^2 - nid_E) = F$ et l'égalité $f(x) = -\sqrt{n}x$ s'écrit aussi $\varphi(x) = -\sqrt{n}x \Leftrightarrow xKer\,(\theta + id_F)$. Par double inclusion $Ker(f+\sqrt{n}id_E) = Ker\,(\theta + id_F)$ et, de même, $Ker(f - \sqrt{n}id_E) = Ker\,(\theta - id_F)$. Ainsi $F = Ker(f - \sqrt{n}id_E) \oplus Ker(f + \sqrt{n}id_E)$.
7) On pose $b_j = (e_1^j, .., e_{n_j}^j)$ base de $\begin{cases} Ker(f - \sqrt{n}id_E) \text{ si } j = 1 \\ Ker(f + \sqrt{n}id_E) \text{ si } j = 2 \\ Ker(f - i\sqrt{n}id_E) \text{ si } j = 3 \\ Ker(f + i\sqrt{n}id_E) \text{ si } j = 4 \end{cases}$; dès lors dans une telle base, f sera représenté par la matrice voulue.
8) De façon générale une somme de Gauss est : $G_n =_{k=0}^{n-1} \tau^{k^2}$, où $\tau = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$.

$G_1 = 1, G_2 = 1 - 1 = 0, G_3 = 1 + j + j = + = i\sqrt{3}, G_4 = 1 + i + 1 + i = 2(1+i), G_6 = 1 + \exp(\dfrac{i\pi}{3}) + j^2 - 1 + j^2 + \exp(\dfrac{i\pi}{3}) = 0.$

9) On reconnaît une somme géométrique de raison τ^r. Si $C = 1 \Leftrightarrow \exp\left(\dfrac{2i\pi r}{n}\right) = 1 \Longleftrightarrow n$ divise r cette somme vaut n. Sinon elle vaut $\dfrac{1-(\tau^r)^n}{1-\tau^r} = \dfrac{1-1}{1-\tau^r} = 0$.

10) Le coefficient d'indice k,l de la matrice produit en vue est : ${}_{s=1}^{n}\tau^{(k-1)(s-1)}\tau^{-(s-1)(l-1)} = {}_{s=1}^{n}\left(\tau^{(k-l)}\right)^{(s-1)} = \begin{cases} n \text{ si } k = l \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$, par la question précédente puisque n divise $k-l$ signifie $k = l$ puisque $1 - n \leq k - l \leq n - 1$.

Il en résulte que $A_n \times \overline{A_n} = nI_n$ donc $A_n \in GL_n(\mathbb{C})$ avec $\boxed{A_n^{-1} = \dfrac{1}{n}\overline{A_n}.}$ Par ailleurs $\boxed{|\det(A_n)| = n^{n/2}.}$

11) Le coefficient d'indice k,l de A_n^2 est ${}_{s=1}^{n}\tau^{(k-1)(s-1)}\tau^{(s-1)(l-1)} = {}_{s=1}^{n}\left(\tau^{(k+l-2)}\right)^{(s-1)}$

$\overset{Q8}{=} \begin{cases} n \text{ si } k = l = 1 \text{ ou } k + l = n + 2 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$. Ainsi $B_n = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & & & 1 \\ & (0) & / & \\ & & 1 & (0) \\ & 1 & & \end{pmatrix}$ et, après calcul $B_n^2 = I_n$.

12) Prenons $x = (x_1, .., x_n) : x \in Ker(\theta - id_E) \Leftrightarrow \theta(x) = x$ donc $x_2 = x_n, ...x_i = x_{n+2-i}, 2 \leq i \leq n$.
Si $n = 2p, Ker(\theta - id_E) = Vect(e_1, e_{p+1}, e_i - e_{2p+2-i}, 2 \leq i \leq p)$ et $\dim(Ker(\theta - id_E)) = p + 1 = E(n/2) + 1$
Si $n = 2p+1, Ker(\theta - id_E) = Vect(e_1, e_i - e_{2p+3-i}, 2 \leq i \leq p+1)$ et $\dim(Ker(\theta - id_E)) = p+1 = E(n/2)+1$.
De même, Si $n = 2p, Ker(\theta + id_E) = Vect(e_i + e_{2p+2-i}, 2 \leq i \leq p)$ et $\dim(Ker(\theta + id_E)) = p - 1 = E(n/2) - 1$.
Si $n = 2p+1, Ker(\theta + id_E) = Vect(e_i + e_{2p+3-i}, 2 \leq i \leq p+1)$ et $\dim(Ker(\theta - id_E)) = p = E(n/2)$.

13) Par Fubini :${}_{1 \leq p < q \leq n}(p+q) = {}_{q=2}^{n}\left({}_{p=1}^{q-1}(p+q)\right)) = {}_{q=2}^{n} q(q-1) + \dfrac{q(q-1)}{2} =$

$\dfrac{3}{2}{}_{q=2}^{n} q(q-1) \overset{\text{changement d'indice}}{=} \dfrac{3}{2}{}_{k=1}^{n-1}(k+1)k = \dfrac{3}{2}\dfrac{(n-1)n(2n-1)}{6} + \dfrac{3}{2}\dfrac{n(n-1)}{2} = \boxed{\dfrac{n(n^2-1)}{2}}.$

14) $\det(A_n) = V(1, \tau, .., \tau^{n-1}) = {}_{1 \leq k < l \leq n}\left(\tau^{l-1} - \tau^{k-1}\right) = {}_{0 \leq k < l \leq n-1}\,\tau^{\frac{l+k}{2}-1}(2i\sin\dfrac{l-k}{n}\pi)$

$\overset{Q13}{=} \tau^{n(n^2-1)/4 - n(n-1)/2}(i)^{n(n-1)/2} \times C$, où $C > 0$. Donc un argument du déterminant est $\dfrac{\pi(n^2-1)}{2} - \pi(n-1) + \dfrac{\pi}{4}n(n-1) = \dfrac{\pi}{4}(n-1)(2n+2+n-4) = \boxed{\dfrac{\pi}{4}(n-1)(3n-2).}$

15)i) Pour tout entier relatif r : $G_n^{r+1} - G_n^r = {}_{k=0}^{n-1}\,\tau^{(r+1+k)^2} - {}_{k=0}^{n-1}\,\tau^{(r+k)^2} \overset{Télescopage}{=} \tau^{(n+r)^2} - \tau^{r^2} = 0$
(puisque $\tau^{jn} = 1$ si $j \in \mathbb{Z}$). Le résultat en vue se déduit immédiatement de cette égalité.

ii) $|G_n|^2 = \overline{G_n}G_n = {}_{r=0}^{n-1}\,\tau^{-r^2}G_n \overset{i)}{=}{}_{r=0}^{n-1}\,\tau^{-r^2}G_n^r = {}_{r=0}^{n-1}\,\tau^{-r^2}\left({}_{s=0}^{n-1}\tau^{(r+s)^2}\right) \overset{Fubini}{=} {}_{0 \leq r,s \leq n-1}\,\tau^{(r+s)^2 - r^2}$.

iii) Par ii) et Fubini : $|G_n|^2 = {}_{s=0}^{n-1}\left({}_{r=0}^{n-1}\tau^{(r+s)^2-r^2}\right) = {}_{s=0}^{n-1}\,\tau^{s^2}\left({}_{r=0}^{n-1}\tau^{2sr}\right)$. On posera $(*) = {}_{r=0}^{n-1}\,\tau^{2sr}$; cette somme (ces sommes) a été calculée en 9) et $(*) = 0$ si $2s$ n'est pas multiple de n et n sinon. Comme $2s$ décrit $\{0, 2, ..., 2n-2\}$ s'il existe q entier naturel tel que $2s = qn$, cet entier ne peut valoir que 0 ($s = 0$ alors) ou 1 dans le cas où n est pair ($n = 2p$) et $s = p$ alors. En conclusion si n est impair $(*) = 0$ sauf pour $s = 0$ et alors $(*) = n$; dans ce cas $|G_n|^2 = 1 \times n$ soit $\boxed{|G_n| = \sqrt{n}.}$ Si maintenant $n = 2p$, ce qui précéde montre que $|G_n|^2 = n(1 + \tau^{p^2}) = n(1 + \exp(\dfrac{2i\pi p^2}{2p})) = n(1 + \exp(ip\pi)) = \begin{cases} 0 \text{ si } p \text{ impair} \\ 2n \text{ sinon} \end{cases}$ donc

$\boxed{|G_n| = \begin{cases} 0 \text{ si } n = 2(2q+1) \\ \sqrt{2n} \text{ si } n = 4q \end{cases}}.$

16) Notons f l'endomorphisme canoniquement associé à A_n, les calculs effectués en 11) ont montré que $A_n^4 = n^2 I_n$ soit que $f^4 = n^2 id_E$. La questionn 7) prouve alors qu'une matrice diagonale du type voulu représente f; si D désigne cette matrice, A_n et D sont semblables puisqu'elles représentent le même endomorphisme.

17) La trace étant un invariant de similitude $\boxed{G_n = tr(A_n) = tr(D) = \sqrt{n}(a - b + i(c-d))}$ par simple lecture de la diagonale de D. Par ailleurs $|G_n|^2 = n((a-b)^2 + (c-d)^2)$ et, en invoquant 15)iii) :

$\boxed{(a-b)^2+(c-d)^2=\left\{\begin{array}{c}1 \text{ si } n \text{ impair}\\ 2 \text{ si } n=4q\\ 0 \text{ sinon}\end{array}\right.}$.

18) $a+b=\dim(Ker(f-\sqrt{n}id_E))+\dim(Ker(f+\sqrt{n}id_E))=\dim(Ker(f^2-nid_E))$ (cf préliminaires) et, avec les notations de 12) : $Ker(\theta-id_E)=Ker(f^2-nid_E)$. On prouve de même que $Ker(\theta+id_E)=Ker(f^2+nid_E)$ et que $c+d=\dim(Ker(f^2-nid_E))$. On utilise alors les résultats de 12) si $n=2p+1$: $\dim\left(Ker(\theta-id_E)\right)=p+1$ et $\dim\left(Ker(\theta+id_E)\right)=p$ et si $n=2p$: $\dim\left(Ker(\theta-id_E)\right)=p+1$ et $\dim\left(Ker(\theta+id_E)\right)=p-1$.
Bilan $\boxed{n=2p+1 : a+b=p+1 \text{ et } c+d=p}$ et $\boxed{n=2p : a+b=p+1 \text{ et } c+d=p-1}$.
19) Deux équations ont été obtenus enn 18), une première fait l'objet de 17).
20) et 21) Supposons d'abord $n=4q+2$ alors 17) donne $a=b$ ainsi que $c=d$ cette information combinée à 18) $a+b=2q+2, c+d=2q$ permet de trouver $\underline{a=b=q+1, c=d=q.}$
Si maintenant $n=4q$ (parce que les inconnues sont des entiers) 17) ne donne que $|a-b|=|c-d|=1$ et 18) dit que $a+b=2q+1, c+d=2q-1$. <u>On ne peut à ce stade déterminer a,b,c,d.</u>
Il en va de même si $n=2q+1$: 17) donne ($|a-b|=1$ et $c=d$) ou ($a=b$ et $|c-d|=1$) ; ces informations sont à relier à $a+b=p+1, c+d=p$. Une discussion suivant la parité de p s'impose :
$p=2q$ alors $|a-b|=1, a+b=2q+1$ et $c=d=q; p=2q+1$ alors $a=b=q+1$ et $|c-d|=1, c+d=2q+1$.
Pour aller plus loin utilisons l'argument du déterminant de A_n mis en évidence en 13). Comme $\det(A_n)=\det(D)=\sqrt{n}^n(-1)^b(i)^c(-i)^d$, on dispose d'une "autre expression" de cet argument à savoir :
$(b+d)\pi+(c+d)\dfrac{\pi}{2}$ que l'on va comparer à $\dfrac{\pi}{4}(3n-2)(n-1)$
Supposons que $n=4q+1$ alors $\dfrac{\pi}{4}(3n-2)(n-1)\equiv q\pi\,[2\pi]$ et $(b+d)\pi+(c+d)\dfrac{\pi}{2}=b\pi+2q\pi$ donc b et q de même parité; de plus $|a-b|=1, a+b=2q+1$, ce qui donne $a=q+1, b=q$ ou l'inverse mais alors b,q n'ont plus même parité ; ce cas est résolu : $\boxed{a=q+1, b=c=d=q.}$
Si $n=4q+3$: $\dfrac{\pi}{4}(3n-2)(n-1)\equiv(b+d)\pi+(c+d)\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$ donne d de la parité de q donc (cf ci-dessus) $d=q$ et on trouve $c=q+1$ et on vait déjà $a=b=q+1$. Cas résolu aussi.
Si $n=4q$: l'égalité modulo 2π des arguments donne $b+d$ impair; cette fois cette information est insuffisante pour conclure en effet 2 solutions sont envisageables : $a=q+1, b=q, c=q, d=q-1$ ou $a=q, b=q+1, c=q-1, d=q$.

Finissons en donnant les valeurs des sommes de Gauss : $\boxed{G_n=\left\{\begin{array}{c}0 \text{ si } n=4q+2\\ \sqrt{n} \text{ si } n=4q+1\\ i\sqrt{n} \text{ si } n=4q+3\\ \pm\sqrt{n}(1+i) \text{ si } n=4q\end{array}\right.}$. Gauss mit plusieurs années à préciser le bon signe du dernier cas......