Devoir à la maison n° 1

Exercice 1.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_0 = 3, \quad u_1 = 7 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n.$$

   Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^{n+1} + 3^n$.
2. Traduire mathématiquement l'assertion : "tout nombre réel admet un entier naturel qui lui est supérieur". Déterminer, en justifiant, la valeur de vérité de cette assertion.
3. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.
   (a) $\forall x \in \mathbb{R},\ x \geq 3 \Rightarrow x \geq 2$,
   (b) $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 4 \Rightarrow x \geq 2$,
   (c) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R}, x + y > 0$.

Exercice 2.

1. On considère l'équation du second degré, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$x^2 - 6x + 5 = 0. \qquad (E)$$

   (a) Soit $b \in \mathbb{R}$. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 + 2bx = (x + b)^2 - b^2$.
   (b) En déduire que : $(E) \Leftrightarrow (x - 3)^2 = 4$.
   (c) Soit $c \in \mathbb{R}$. Rappeler, sans justifier, les solutions de l'équation d'inconnue $y \in \mathbb{R}$:

$$y^2 = c.$$

   (d) **En déduire** les solutions de (E).
2. **En utilisant cette méthode,** résoudre les équations suivantes :
   (a) $x^2 - 8x + 15 = 0$,
   (b) $x^2 - 5x + 6 = 0$,
   (c) $x^2 - 2x + 10 = 0$,
   (d) $2x^2 - 11x + 12 = 0$.