Devoir à la maison n° 1
CORRIGÉ

Exercice 1.

1. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, notons P_n l'assertion « $u_n = 2^{n+1} + 3^n$ ».
Comme $2^1 + 3^0 = 2 + 1 = 3 = u_0$, P_0 est vraie. De même pour P_1.
Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons P_n et P_{n+1} vraies. Alors :
$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 5u_{n+1} - 6u_n \\ &= 5 \times (2^{n+2} + 3^{n+1}) - 6 \times (2^{n+1} + 3^n) \\ &= (5 \times 2 - 6)2^{n+1} - (5 \times 3 - 6)3^n \\ &= 2^{n+3} - 3^{n+2} \end{aligned}$$
donc P_{n+2} est vraie. Par récurrence double, P_n est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Cette assertion s'écrit : "$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N},\ n \geq x$".
Cette assertion est vraie. En effet : soit $x \in \mathbb{R}$. Notons $E(x)$ la partie entière de x (c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à x. Alors, par définition, $E(x) + 1 \geq x$, et $E(x) + 1$ est un entier, donc $n = E(x) + 1 \in$ convient.
3. (a) Vrai : soit $x \in \mathbb{R}$, supposons que $x \geq 3$. Comme $3 \geq 2$, on a donc $x \geq 2$.
   (b) Faux : $x = -3$ vérifie $x^2 = 9 \geq 4$, mais $x < 2$.
   (c) Vrai : soit $x \in \mathbb{R}$, alors $y = 1 - x$ convient.

Exercice 2.

1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : $(x + b)^2 - b^2 = x^2 + 2bx + b^2 - b^2 = x^2 + 2bx$.
   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :
$$\begin{aligned} (E) &\Leftrightarrow x^2 - 6x = -5 \\ &\Leftrightarrow (x-3)^2 - 9 = -5 \\ &\Leftrightarrow (x-3)^2 = 4. \end{aligned}$$
   (c) Si $c \geq 0$: $y^2 = c \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{c}$,
   Si $c < 0$: $y^2 = c \Leftrightarrow y = \pm i\sqrt{-c}$.
   (d) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :
$$\begin{aligned} (E) &\Leftrightarrow (x-3)^2 = 4 \\ &\Leftrightarrow x - 3 = 2 \text{ ou } -2 \\ &\Leftrightarrow x = 5 \text{ ou } 1. \end{aligned}$$

2. (a)

$$\begin{aligned} x^2-8x+15=0 &\Leftrightarrow x^2-8x=-15\\ &\Leftrightarrow (x-4)^2-16=-15\\ &\Leftrightarrow (x-4)^2=1\\ &\Leftrightarrow x-4=1 \text{ ou } -1\\ &\Leftrightarrow x=5 \text{ ou } 3. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} x^2-5x+6=0 &\Leftrightarrow x^2-5x=-6\\ &\Leftrightarrow \left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}=-6\\ &\Leftrightarrow \left(x-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\\ &\Leftrightarrow x-\frac{5}{2}=\frac{1}{2} \text{ ou } -\frac{1}{2}\\ &\Leftrightarrow x=3 \text{ ou } 2. \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} x^2-2x+10=0 &\Leftrightarrow x^2-2x=-10\\ &\Leftrightarrow (x-1)^2-1=-10\\ &\Leftrightarrow (x-1)^2=-9\\ &\Leftrightarrow x-1=3i \text{ ou } -3i\\ &\Leftrightarrow x=1+3i \text{ ou } 1-3i. \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} 2x^2-11x+12=0 &\Leftrightarrow x^2-\frac{11}{2}x+6=0\\ &\Leftrightarrow x^2-\frac{11}{2}x=-6\\ &\Leftrightarrow \left(x-\frac{11}{4}\right)^2-\frac{121}{16}=-6\\ &\Leftrightarrow \left(x-\frac{11}{4}\right)^2=\frac{25}{16}\\ &\Leftrightarrow x-\frac{11}{4}=\frac{5}{4} \text{ ou } -\frac{5}{4}\\ &\Leftrightarrow x=4 \text{ ou } \frac{3}{2}. \end{aligned}$$