Devoir surveillé n° 1

Durée : 3 heures. Calculatrices non autorisées.
La notation tiendra largement compte de la qualité de la rédaction.
Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre souhaité.
Les exercices qui ne sont pas traités dans l'ordre doivent être rédigés sur des copies séparées.
Le sujet et le brouillon ne sont pas à rendre. Le barème est indicatif.

Exercice 1. *(8 points)* On considère la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{1+e^{-x}} \end{array} \right.$.

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + f(-x) = 1$.
2. En déduire que la fonction $g : x \mapsto f(x) - \dfrac{1}{2}$ est impaire. Que peut-on en déduire sur la courbe de f ?
3. Déterminer le sens de variation de f.
4. Déterminer les limites de f en $\pm\infty$.
5. Tracer la courbe de f.
6. Représenter les équations $f(x) = 0,9$ et $f(x) \leq 0,9$ sur la courbe de f. Résoudre ces équations.

Exercice 2. *(6 points)* Résoudre les équations suivantes sur $\mathbb{R}$:

1. $|x+3| - 2|x+1| \leq 3$.
2. $\sqrt{x-3} + \sqrt{x} = 1$.

Exercice 3. *(6 points)* On considère un réel non nul x tel que $x + \dfrac{1}{x} \in \mathbb{Z}$.

1. En développant $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2$, montrer que $x^2 + \dfrac{1}{x^2} \in \mathbb{Z}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Développer $\left(x^{n+1} + \dfrac{1}{x^{n+1}}\right)\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$.
3. En raisonnant par récurrence double, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ x^n + \dfrac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$.
4. Donner un exemple (différent de 1 et -1) d'un tel x.

Problème. *(10 points)* Pour n dans $\mathbb{N}$, on note $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

On rappelle que $0! = 1$ et que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ k! = k \times (k-1)!$.

I. *Question préliminaire :* Montrer la formule de la somme des termes d'une suite géométrique :

$$\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}.$$

II. 1. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

2. i. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$.

   ii. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq 3$.

3. Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) est convergente. On note e sa limite.

4. *(Question difficile)* Déterminer n tel que $|u_n - e| \leq 10^{-3}$.
   Si vous les connaissez, donnez les trois premières décimales de e.

III. On va démontrer que e est irrationnel, en raisonnant *par l'absurde* : on fait l'hypothèse que e est rationnel, et qu'il existe donc (p, q) dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $e = \frac{p}{q}$.

1. i. Soit $n \geq q$. Montrer que $q!u_n = b + \varepsilon_n$, où $b \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon_n = \sum_{k=q+1}^{n} \frac{q!}{k!}$.

   ii. Montrer que : $\forall k \geq q+1,\ \frac{q!}{k!} \leq \frac{1}{(q+1)^{k-q}}$.

   iii. En déduire que $\varepsilon_n < \frac{1}{q}$.

2. En déduire que $q!e = b + \varepsilon$, où $b \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon \leq \frac{1}{q}$.

3. Montrer que l'hypothèse de départ aboutit à une contradiction. Conclure.