Devoir surveillé n° 1
CORRIGÉ

Exercice 1.

1. Soit x dans $\mathbb{R}$. On a :

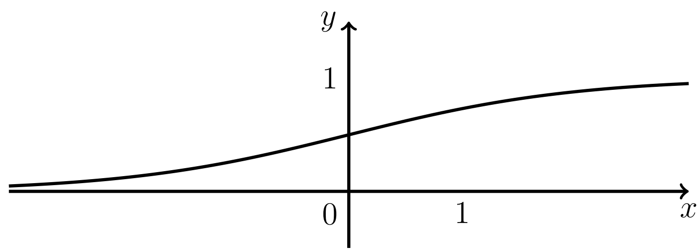
$$\begin{aligned} f(x)+f(-x) &= \frac{1}{1+e^{-x}}+\frac{1}{1+e^{x}} \\ &= \frac{(1+e^{x})+(1+e^{-x})}{(1+e^{-x})(1+e^{x})} \\ &= \frac{2+e^{x}+e^{-x}}{2+e^{x}+e^{-x}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

2. Soit x dans $\mathbb{R}$. D'après la question précédente : $g(-x)=f(-x)-\frac{1}{2}=(1-f(x))-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-f(x)=-g(x)$, donc g est impaire. Le graphe de g est donc symétrique par rapport à l'origine du plan, donc le graphe de f, translaté du graphe de g par le vecteur $\frac{1}{2}j$, est symétrique par rapport au point $\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

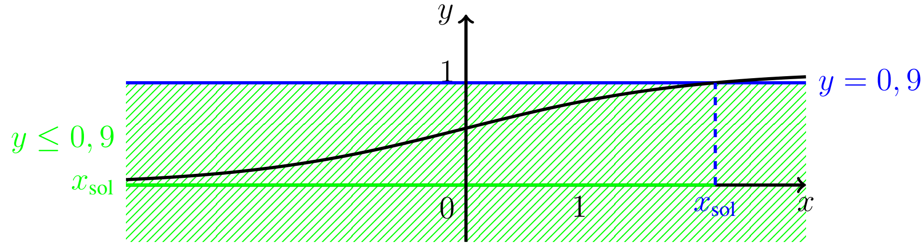
3. On a $f=j\circ h$; en effet, pour x dans $\mathbb{R}$, $j(h(x))=j(e^{-x})=\frac{1}{1+e^{-x}}=f(x)$. Comme j et h sont décroissantes, f est donc croissante.

4. Comme $e^{-x}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$ et $e^{-x}\underset{x\to-\infty}{\longrightarrow}+\infty$, $f(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}1$ et $f(x)\underset{x\to-\infty}{\longrightarrow}0$.

5.



6.



On a $f(x)=0,9\Rightarrow\frac{1}{1+e^{-x}}=0,9\Rightarrow 1+e^{-x}=\frac{10}{9}\Rightarrow e^{-x}=\frac{1}{9}\Rightarrow -x=\ln\left(\frac{1}{9}\right)\Rightarrow x=\ln 9=2\ln 3$.

De même, $f(x)\leq 0,9\Rightarrow\frac{1}{1+e^{-x}}\leq 0,9\Rightarrow 1+e^{-x}\geq\frac{10}{9}\Rightarrow e^{-x}\geq\frac{1}{9}\Rightarrow -x\geq\ln\left(\frac{1}{9}\right)\Rightarrow x\leq\ln 9=2\ln 3$.

Exercice 2.

1. Soit x dans $\mathbb{R}$. On sait que :
   - $|x+3| = -x-3$ si $x \leq -3$, $x+3$ sinon ;
   - $|x+1| = -x-1$ si $x \leq -1$, $x+1$ sinon.

   On distingue donc les cas :

x	$]-\infty, -3]$	$[-3, -1]$	$[-1, +\infty[$
$\|x+3\|$	$-x-3$	$x+3$	$x+3$
$\|x+1\|$	$-x-1$	$-x-1$	$x+1$
$\|x+3\| - 2\|x+1\| \leq 3$	$(-x-3) - 2(-x-1) \leq 3$ $\Leftrightarrow x-1 \leq 3$ $\Leftrightarrow x \leq 4$	$(x+3) - 2(-x-1) \leq 3$ $\Leftrightarrow 3x+5 \leq 3$ $\Leftrightarrow x \leq -\frac{2}{3}$	$(x+3) - 2(x+1) \leq 3$ $\Leftrightarrow -x+1 \leq 3$ $\Leftrightarrow x \geq -2$
S	$S_1 =]-\infty, -3]$	$S_2 = [-3, -1]$	$S_3 = [-1, +\infty[$

   donc $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \mathbb{R}$.

2. L'équation est définie lorsque $x - 3 \geq 0$ et $x \geq 0$, c'est-à-dire lorsque $x \in D = [3, +\infty[$. Pour tout x dans D, on a alors :
$$\begin{aligned} \sqrt{x-3} + \sqrt{x} = 1 &\implies \sqrt{x-3} = 1 - \sqrt{x} \\ &\implies x - 3 = 1 + x - 2\sqrt{x} \\ &\implies -4 = -2\sqrt{x} \\ &\implies \sqrt{x} = 2 \\ &\implies x = 4. \end{aligned}$$
   Réciproquement, si $x = 4$, alors $x \in D$, mais n'est pas solution de l'équation : $\sqrt{4-3} + \sqrt{4} = 3 \neq 1$. Donc $S = \emptyset$.

Exercice 3.

1. Comme $x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$, $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 \in \mathbb{Z}$. De plus, $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$, donc $x^2 + \frac{1}{x^2} \in \mathbb{Z}$.
2. On a : $\left(x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^{n+2} + x^n + \frac{1}{x^n} + \frac{1}{x^{n+2}}$.
3. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on note P_n : « $x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$ ».

   Initialisation : pour $n = 0$, $x^0 + \frac{1}{x^0} = 2 \in \mathbb{Z}$, donc P_0 est vraie, et P_1 est vraie par hypothèse.

   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons P_n et P_{n+1} vraies. Alors $x^n + \frac{1}{x^n}$, $x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}$ et $x + \frac{1}{x}$ sont des entiers, donc, d'après la question 2., $x^{n+2} + \frac{1}{x^{n+2}}$ est un entier. Donc P_{n+2} est vraie.

   Donc par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$.
4. On cherche x tel que $x + \frac{1}{x} = k \in \mathbb{Z}$. Or $x + \frac{1}{x} = k \Leftrightarrow x^2 - kx + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{k \pm \sqrt{k^2 - 4}}{2}$ lorsque $k^2 - 4 \geq 0$. Pour $k = 3$ par exemple, $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ conviennent.

Problème.

I. Soient $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}(1-a)\sum_{k=0}^{n} a^k &= \sum_{k=0}^{n} a^k - a^{k+1}\\ &= a^0 - a^{n+1}\\ &= 1 - a^{n+1}\end{aligned}$$

en reconnaissant une somme télescopique ; d'où la formule voulue.

II. 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)!} \geq 0$ donc la suite (u_n) est croissante.

2. i. Soit k dans $\mathbb{N}^*$. Alors $\dfrac{1}{k!} = \displaystyle\prod_{j=1}^{k} \dfrac{1}{j}$, or : $\forall j \geq 2,\ \dfrac{1}{j} \leq \dfrac{1}{2}$, donc $\dfrac{1}{k!} \leq 1 \times \displaystyle\prod_{j=2}^{k} \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2^{k-1}}$.

ii. Soit n dans $\mathbb{N}^*$. D'après la question précédente, $u_n \leq \dfrac{1}{0!} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2^{k-1}} = 1 + \dfrac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}$ d'après la formule des termes d'une suite géométrique, donc $u_n \leq 3 - \dfrac{1}{2^{n-1}} \leq 3$.

3. D'après les questions précédentes, la suite (u_n) est croissante et majorée, donc convergente.

4. Soit (n, m) dans $(\mathbb{N}^*)^2$ tel que $n \leq m$. Alors, d'après les questions précédentes :
$u_m - u_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{m} \dfrac{1}{k!} \leq \sum_{k=n+1}^{m} \dfrac{1}{2^{k-1}} = \dfrac{1}{2^n}\dfrac{1-\frac{1}{2^{m-n}}}{1-\frac{1}{2}} \leq \dfrac{1}{2^n}\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$.
Par passage à la limite $m \to +\infty$, on a $e - u_n \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$. À 10^{-3} près, on a donc $e \simeq u_{11} \simeq 2,718$.

III. 1. i. On a : $q!u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{q!}{k!} = \sum_{k=1}^{q} \dfrac{q!}{k!} + \sum_{k=q+1}^{n} \dfrac{q!}{k!}$.

Or $\forall k \leq q$, $\dfrac{q!}{k!} = q(q-1)\ldots(q-k+1) \in \mathbb{N}$, donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{q} \dfrac{q!}{k!} \in \mathbb{N}$.

ii. Soit $k \geq q+1$. Alors : $\dfrac{q!}{k!} = \dfrac{1}{(q+1)(q+2)\ldots k} = \displaystyle\prod_{j=q+1}^{k} \dfrac{1}{j} \leq \prod_{j=q+1}^{k} \dfrac{1}{q+1} = \dfrac{1}{(q+1)^{k-q}}$.

iii. D'après la question précédente :

$$\varepsilon_n \leq \sum_{k=q+1}^{n} \frac{1}{(q+1)^{k-q}} = \frac{1}{q+1}\frac{1-\frac{1}{(q+1)^{n-q}}}{1-\frac{1}{q+1}} < \frac{1}{q+1}\frac{1}{1-\frac{1}{q+1}} = \frac{1}{q}.$$

2. D'après la question précédente, la suite (ε_n) est majorée par $\dfrac{1}{q}$. Comme elle est en outre croissante, elle converge vers un réel ε qui vérifie $\varepsilon \leq \dfrac{1}{q}$. Par passage à la limite $n \to +\infty$ dans la formule obtenue en 1.i., on a donc $q!e = b + \varepsilon$.

3. D'après la question précédente, $\varepsilon = q!e - b$. Or $q!e = (q-1)!p$ par hypothèse, donc comme p, q et b sont entiers, ε l'est également. Or $0 < \varepsilon \leq \dfrac{1}{q}$ d'après la question précédente, où $q \geq 2$ (car si $q = 1$, alors e est entier, ce qui est faux d'après I.4). Donc ε ne peut pas être entier. Il y a contradiction : l'hypothèse de départ est donc fausse, donc e est irrationnel.