Feuille d'exercices 3
FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE

1 - GÉNÉRALITÉS

Exercice 1. Donner un exemple de :
(a) fonction majorée n'admettant pas de maximum,
(b) fonction bornée n'admettant pas d'extremum,
(c) fonction à la fois paire et impaire,
(d) fonction croissante et périodique sur $\mathbb{R}$,
(e) fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ telle que tout réel admette exactement deux antécédents par f.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bornée telle que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x + y) = f(x) + f(y)$.
(a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(x) = \dfrac{f(nx)}{n}$.
(b) En déduire que f est la fonction nulle.

Exercice 3. Les fonctions suivantes sont-elles paires ? impaires ? périodiques ?

- $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(x^2) \end{array} \right.$
- $h : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 + 1 \end{array} \right.$
- $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \cos^2(t) \end{array} \right.$
- $i : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & \frac{2y}{1+y^2} \end{array} \right.$

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Pour tout a dans $\mathbb{R}$, on note $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_a(x) = f(x + a)$. On suppose qu'il existe des réels a et b tels que f_a est paire et f_b est impaire. Montrer que f est périodique.

Exercice 5. Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction. On note $g : A \to \mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto 2 - f(x)$. Par quelle transformation obtient-on le graphe de g à partir de celui de f ?

Exercice 6. Soit $f : [-1, 2] \to \mathbb{R}$ une fonction. On note g la fonction $x \mapsto 2f\left(\dfrac{x}{2}\right)$.
(a) Quel est le domaine de définition de g ?
(b) Par quelle transformation obtient-on le graphe de g à partir de celui de f ?

Exercice 7. Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Si f est croissante et g est décroissante, que dire de $f \circ g$? et de $g \circ f$? Et si f et g sont toutes deux croissantes ? décroissantes ?

2 - DÉRIVATION

Exercice 8. Déterminer l'ensemble des fonctions dérivables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifient : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x + y) = f(x) + f(y)$.

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.
(a) Montrer l'assertion : (f paire)$\Rightarrow$(f' impaire). La réciproque est-elle vraie ?
(b) Mêmes questions en échangeant « paire »et « impaire ».
(c) Soit $T > 0$, on suppose que f est T-périodique. Montrer que f' l'est également.

Exercice 10. Déterminer pour chaque fonction son domaine de définition, le domaine sur lequel elle est dérivable, et calculer sa dérivée.

- $f : x \mapsto \dfrac{2x}{1-x^2}$
- $g : x \mapsto e^{-2x^2-5}$
- $h : x \mapsto \sqrt{3x-4}$
- $i : x \mapsto \dfrac{x+1}{x^2+3x+1}$
- $j : x \mapsto \dfrac{x^2+x-6}{x+3}$
- $k : x \mapsto 1-\ln(5x-1)$
- $l : x \mapsto \dfrac{3\sin(x)}{\cos(2x)}$
- $m : x \mapsto \sqrt{|x^2-3x+2|}$
- $n : x \mapsto x^x$
- $p : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x}{2-x}}$
- $q : x \mapsto e^{x\tan x}$
- $r : x \mapsto \dfrac{e^{x^2}}{\ln(x)-1}$

Exercice 11. Montrer que : $\forall t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right],\ \dfrac{2}{\pi}t \leq \sin t \leq t$.

Exercice 12. (a) Montrer que : $\forall x > -1,\ \ln(1+x) \leq x$.

(b) Soit a un réel. Déduire de la question précédente que pour tout entier $n > |a|$, $\left(1+\dfrac{a}{n}\right)^n \leq e^a \leq \left(1-\dfrac{a}{n}\right)^{-n}$.

Exercice 13. Étudier les fonctions suivantes : domaine de définition, dérivabilité, variations, graphe.

- $f : x \mapsto \sqrt{x-\sqrt{x}}$
- $g : x \mapsto \sqrt{1-\sin x}$
- $h : x \mapsto \dfrac{x}{e^x-1}$
- cotan : $x \mapsto \dfrac{\cos x}{\sin x}$

Exercice 14. Calculer, pour tout n dans $\mathbb{N}$, la dérivée $n^{\text{ème}}$ des fonctions suivantes :

- $f : x \mapsto \sin^3(x)$,
- $g : x \mapsto x^{n-1}\ln(x)$.

3 - Bijections

Exercice 15. Montrer que la fonction $u : [0,1] \to [0,1]$ définie par : $\forall x \in [0,1],\ u(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1-x & \text{sinon} \end{cases}$, est une bijection, et que $u^{-1} = u$.

Exercice 16. Soit $f : E \to F$ une fonction impaire et bijective. Montrer que f^{-1} est impaire. A-t-on un énoncé analogue pour une fonction paire ?

Exercice 17. Déterminer dans chaque cas E et F tels que la fonction $E \to F$ ainsi définie soit bijective. Déterminer alors la fonction réciproque.

- $x \mapsto \sqrt{2x+3}-1$
- $x \mapsto \dfrac{x}{1+|x|}$

Exercice 18. On considère la fonction $\tan : \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ donnée par : $\forall x \in \mathbb{R},\ \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

(a) Montrer que $\tan$ est une bijection. On note $\arctan$ sa réciproque.

(b) Déterminer les variations de $\arctan$.

(c) En utilisant la formule de composition des dérivées, calculer la dérivée de $\arctan$.

Exercice 19. Montrer que la fonction $x \mapsto x+\sin(x)$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 20. Soit $f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{e^x+1}{e^x-1}\right)$.

(a) Déterminer le domaine de définition de f. Montrer que $f \circ f = \mathrm{Id}$.

(b) En déduire que f est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans lui-même. Déterminer sa réciproque.