Réponses

4.1 .... $\boxed{\text{b}}$

4.2 a) .... $\boxed{u = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + L'\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}}$

4.2 b) .... $\boxed{L + L'}$

4.2 c) .... $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \dfrac{u}{L} + \dfrac{u}{L'}}$

4.2 d) .... $\boxed{\dfrac{LL'}{L + L'}}$

4.3 .... $\boxed{L}$

4.4 a) .... $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \left(\dfrac{1}{C} + \dfrac{1}{C'}\right)i}$

4.4 b) .... $\boxed{\dfrac{CC'}{C + C'}}$

4.4 c) .... $\boxed{i = (C + C')\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}}$

4.4 d) .... $\boxed{C + C'}$

4.5 .... $\boxed{\text{a}}$

4.6 .... $\boxed{\dfrac{C}{2}}$

4.7 a) .... $\boxed{\text{c}}$

4.7 b) .... $\boxed{\text{a}}$

4.8 .... $\boxed{\text{b}}$

4.9 a) .... $\boxed{\text{c et d}}$

4.9 b) .... $\boxed{\text{a et c}}$

4.9 c) .... $\boxed{\text{b}}$

4.9 d) .... $\boxed{\text{a, c et d}}$

4.9 e) .... $\boxed{\text{a, b et c}}$

4.10 a) .... $\boxed{0}$

4.10 b) .... $\boxed{E}$

4.10 c) .... $\boxed{\dfrac{E}{R}}$

4.10 d) .... $\boxed{E}$

4.10 e) .... $\boxed{\dfrac{E}{R}}$

4.11 a) .... $\boxed{0}$

4.11 b) .... $\boxed{0}$

4.11 c) .... $\boxed{\dfrac{2E}{3R}}$

4.11 d) .... $\boxed{\dfrac{1}{3}E}$

4.12 a) .... $\boxed{\dfrac{L}{R}}$

4.12 b) .... $\boxed{\dfrac{RC}{2}}$

4.13 a) .... $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \dfrac{R}{L}i = \dfrac{E}{L}}$

4.13 b) .... $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{RC}u_C = \dfrac{1}{RC}E}$

4.13 c) .... $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{RC}i(t) = 0}$

4.13 d) .... $\boxed{i = \dfrac{u}{R} + C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}}$

4.13 e) .... $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \dfrac{2}{RC}u = \dfrac{E}{RC}}$

4.14 a) .... $\boxed{u_C(t) = E\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)}$

4.14 b) .... $\boxed{i(t) = \dfrac{E}{R}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}}$

4.14 c) .... $\boxed{u_C(t) = \dfrac{1}{2}E}$

4.15 a) .... $\boxed{\text{b}}$

4.15 b) c

4.15 c) .... a

4.15 d) .... $4\,\mathrm{V}$

4.15 e) .... $4\,\mathrm{V}$

4.15 f) .... $1{,}3\,\mathrm{k}\Omega$

4.16 a) .... $[\omega_0] = T^{-1}$

4.16 b) .... Q est sans dimension

4.16 c) .... $\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

4.16 d) .... $R\sqrt{\dfrac{C}{L}}$

4.17 a) .... $\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{R}{L}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{LC}u = \dfrac{E}{LC}$

4.17 b) .... $\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{1}{RC}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{LC}u = 0$

4.18 a) .... $E \times (1 - \cos(\omega_0 t))$

4.18 b) .... $\dfrac{E}{L\omega_0}\sin(\omega_0 t)$

4.19 a) .... b

4.19 b) c

4.19 c) .... b

4.19 d) .... a

4.19 e) .... $1{,}2 \times 10^3\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$

Corrigés

4.1 L'intensité est une succession de droites. Sa dérivée est donc constante par morceaux (et non définie au niveau de la discontinuité). Si le dipôle se comportait comme une bobine, la tension devrait être constante par morceaux ce qui n'est pas ce que l'on observe. Il ne s'agit donc pas d'une bobine.

4.2 a) En vertu de la loi d'additivité des tensions, on a $u = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + L'\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$.

4.2 b) On peut donc écrire $u = L_{\mathrm{eq}}\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ à condition de poser $L_{\mathrm{eq}} = L + L'$.

4.2 c) En vertu de la loi des nœuds, on a $i = i_L + i_{L'}$ ce qui donne après dérivation $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \dfrac{u}{L} + \dfrac{u}{L'}$.

4.2 d) On peut écrire $u = L_{\mathrm{eq}}\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ à condition de poser

$$\frac{1}{L_{\mathrm{eq}}} = \frac{1}{L} + \frac{1}{L'} \quad \text{soit} \quad L_{\mathrm{eq}} = \frac{LL'}{L+L'}.$$

4.3 On commence par regrouper les deux bobines en parallèle. On obtient alors $L_1 = \dfrac{L \times L}{L + L} = \dfrac{L}{2}$. Cette bobine se retrouve alors en série avec la première d'où $L_{\mathrm{eq}} = \dfrac{L}{2} + \dfrac{L}{2} = L$.

4.4 a) En vertu de la loi d'additivité des tensions, on a $u = u_C + u_{C'}$. Après dérivation par rapport au temps, on obtient $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \left(\dfrac{1}{C} + \dfrac{1}{C'}\right)i$.

4.4 b) On peut donc écrire $i = C_{\text{eq}} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ à condition de poser

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C'} \quad \text{soit} \quad C_{\text{eq}} = \frac{CC'}{C+C'}.$$

....

4.4 c) En vertu de la loi des nœuds, on a $i = i_C + i_{C'} = (C + C')\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$.

....

4.4 d) On peut écrire $i = C_{\text{eq}} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ à condition de poser $C_{\text{eq}} = C + C'$.

....

4.5 Si le dipôle est un condensateur alors l'intensité est proportionnelle à la dérivé de la tension. La tension est constituée d'une droite croissante, puis d'une droite décroissante de pente opposée et enfin d'une parabole de type $at^2 + bt + c$ avec $a > 0$. Si l'on dérive la tension on obtient alors une constante positive, puis une constante opposée et enfin une droite croissante $(at + b)$. C'est bien ce que l'on observe.

Notez que la tension est continue ce qui est le propre d'un condensateur.

....

4.6 On commence par regrouper les deux condensateurs en parallèle. On obtient alors $C_1 = C/2 + C/2 = C$. Ce condensateur se retrouve alors en série avec le premier d'où $C_{\text{eq}} = \dfrac{C \times C}{C + C} = C/2$.

....

4.7 a) En régime stationnaire, on a $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = 0$ d'où $i = 0$. Cela correspond à la relation constitutive de l'interrupteur ouvert, qui ne laisse pas passer le courant.

....

4.7 b) En régime stationnaire, on a $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0$ d'où $u_L = 0$ ce qui correspond à la relation constitutive de l'interrupteur fermé.

....

4.8 En régime permanent, la bobine se comporte comme un fil et le condensateur comme un interrupteur ouvert. L'ampoule A_1 est court-circuitée et ne brille pas. Le courant dans la branche du condensateur est nul : l'ampoule A_3 est éteinte. Reste l'ampoule A_2 dont la tension à ses bornes est E : elle brille donc.

....

4.9 a) La tension aux bornes du condensateur est toujours continue ; de plus, la tension d'un interrupteur fermé est nulle, donc toujours continue.

....

4.9 b) Du fait de la présence de la bobine, l'intensité i du courant électrique est une grandeur continue. Vu que $u_R = Ri$, c'est aussi le cas de la grandeur u_R.

....

4.9 c) Du fait de la présence du condensateur, la tension u_C est une grandeur continue. En revanche i est discontinue : sa valeur passe de $i(0^-) = 0$ à $i(0^+) = E/R$. Par conséquent $u_R = Ri$ est également discontinue.

....

4.9 d) Le courant i circulant à travers une bobine est continu. On en déduit que $u_R = Ri$ est aussi continu. De plus, la tension u_C, aux bornes du condensateur est aussi continue. Seule la tension aux bornes de la bobine peut présenter une discontinuité.

....

4.9 e) Les courants i et i_2 sont continus car ces courants traversent une bobine. Ainsi, d'après la loi des nœuds, le courant i_1 l'est également.

La tension u est celle aux bornes du condensateur donc continue (la présence de la bobine en parallèle n'y change rien). Finalement, la tension u_L ne l'est pas car $u_L(0^-) = 0$ (régime stationnaire) et $u_L(0^+) = E$ (loi des mailles).

....

4.10 a) À $t = 0^-$, l'interrupteur K est ouvert donc $i(0^-) = 0$. De plus, ce courant circulant dans une bobine, il est continu, d'où finalement $i(0^+) = i(0^-) = 0$.

....

4.10 b) La tension u_L n'est pas nécessairement une grandeur continue, il convient alors d'appliquer la loi des mailles à l'instant $t = 0^+$ d'où $E = Ri(0^+) + u_L(0^+)$.

De plus, on a par continuité du courant (bobine dans la branche) $i(0^-) = i(0^+) = 0$ car K est initialement ouvert.

On en déduit finalement que $u_L(0^+) = E - R \times 0 = E$.

....

4.10 c) Le courant i n'est pas nécessairement une grandeur continue car il n'y a pas de bobine dans la branche. On applique alors la loi des mailles à l'instant $t = 0^+$ d'où $E = Ri(0^+) + u_C(0^+)$.

Or, on a $u_C(0^+) = u_C(0^-)$ (continuité de la tension aux bornes du condensateur) puis $u_C(0^+) = 0$ car ce dernier est initialement déchargé. On en déduit finalement que $i(0^+) = E/R$.

....

4.10 d) La tension u_R n'est pas nécessairement continue. On applique alors la loi des mailles (maille de gauche) à l'instant $t = 0^+$ d'où $E = u_R(0^+) + u(0^+)$.

Or, la tension u est à la fois celle du résistor mais aussi du condensateur car ces dipôles sont placés en parallèle. On en déduit que $u(0^+) = u(0^-)$ (continuité de la tension aux bornes du condensateur) puis $u(0^+) = 0$ car ce dernier est initialement déchargé d'où finalement $u_R(0^+) = E$.

....

4.10 e) On applique la loi des nœuds à l'instant $t = 0^+$ d'où $i(0^+) = i_1(0^+) + i_2(0^+)$.

De plus, on a $i_2(0^+) = u(0^+)/R = 0$ et $i(0^+) = u_R(0^+)/R = E/R$ d'après la question précédente. On en déduit finalement que $i_1(0^+) = E/R$.

....

4.11 a) La tension u aux bornes du condensateur est continue. De plus, on a $u(0^-) = 0$ car le condensateur est initialement déchargé. On en déduit que $u(0^+) = 0$.

....

4.11 b) Pour le condensateur, on a à l'instant $t = 0^+$, $i_1(0^+) = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0^+)$. Il convient alors de trouver l'expression de ce courant.

La loi des nœuds indique que $i(0^+) = i_1(0^+) + i_2(0^+)$. Or, on a $i(0^+) = i(0^-) = 0$ par continuité du courant circulant dans la bobine, et du fait de l'ouverture de K pour $t < 0$. De plus, on a $i_2(0^+) = 2u(0^+)/R = 0$. On en déduit que $i_1(0^+) = 0$ et donc que $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0^+) = 0$.

....

4.11 c) En régime stationnaire, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert et la bobine comme un fil. La loi des mailles indique alors $E = Ri(+\infty) + \dfrac{R}{2}i(+\infty)$ d'où au final $i(+\infty) = \dfrac{2E}{3R}$. Ce résultat aurait aussi pu être obtenu à l'aide d'un schéma équivalent.

....

4.11 d) En régime stationnaire, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert et la bobine comme un fil. On observe alors un pont diviseur de tension formé par les deux résistors restants.

On en déduit $u(+\infty) = \dfrac{R/2}{R + R/2}E = \dfrac{1}{3}E$.

....

4.12 a) On écrit l'équation sous sa forme canonique : $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \dfrac{R}{L}i = \dfrac{E}{L}$. Ainsi, on identifie $\tau = L/R$.

....

4.12 b) De la même manière, l'équation mise sous forme canonique est $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \dfrac{2}{RC}i = \dfrac{E}{RC}$, d'où $\tau = \dfrac{RC}{2}$.

....

4.13 a) Le circuit ne peut être simplifié davantage. Il convient alors d'appliquer la loi des mailles $E = Ri + L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ puis de mettre cette équation sous la forme canonique $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \dfrac{R}{L}i = \dfrac{E}{L}$.

....

4.13 b) Le circuit ne peut être simplifié davantage. Il convient alors d'appliquer la loi des mailles $E = Ri + u_C$. L'équation constitutive du condensateur indique $i = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ d'où en combinant avec la loi des mailles

$$E = RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C.$$

On en déduit sa forme canonique $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{RC}u_C = \dfrac{1}{RC}E$.

....

4.13 c) La loi des mailles indique que $E = Ri + u_C$. Cette fois-ci, il faut garder i et remplacer u_C. Cependant, la relation constitutive du condensateur fait apparaître la dérivée temporelle de cette tension.

Il convient alors de dériver l'équation obtenue à l'aide de la loi des mailles et d'écrire $R\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = 0$. Finalement, on obtient $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{RC}i = 0$.

....

4.13 d) Le circuit comporte deux mailles indépendantes mais ne peut pas être simplifié. Il convient alors de faire particulièrement attention aux indices et variables utilisées pour les différents courants et tensions.

La loi des nœuds indique que $i = i_1 + i_2$ avec $i_2 = u/R$ et $i_1 = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$. On obtient alors en combinant ces résultats l'équation $i = \dfrac{u}{R} + C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$.

....

4.13 e) La loi des nœuds ayant déjà été appliquée, il convient d'appliquer la loi des mailles pour la petite maille de gauche ; on en déduit $E = Ri + u$. On combine alors ce résultat avec celui de la question précédente pour obtenir que $E = u + RC\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u$ et au final $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \dfrac{2}{RC}u = \dfrac{E}{RC}$.

....

4.14 a) Cherchons une solution particulière constante. On trouve $u_\mathrm{p} = E$. La solution générale est donc de la forme $A\mathrm{e}^{-t/\tau} + E$. La condition initiale donne $u_C(0) = 0 = A + E$ soit $A = -E$. Finalement, $u_C(t) = E\big(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\big)$.

....

4.14 b) Ici, l'équation différentielle est homogène (sans second membre). La solution est de la forme $A\mathrm{e}^{-t/\tau}$. La condition initiale donne $i(0) = E/R = A$. Finalement, $i(t) = \dfrac{E}{R}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$.

....

4.14 c) Cherchons une solution particulière constante. On trouve $u_{\mathrm{p}} = \dfrac{1}{2}E$. La solution générale est donc de la forme $A\mathrm{e}^{-t/\tau} + \dfrac{1}{2}E$. La condition initiale donne $u(0) = \dfrac{1}{2}E = A + \dfrac{1}{2}E$ soit $A = 0$. Finalement, $u_C(t) = \dfrac{1}{2}E$.

....

4.15 d) La courbe 2, associée à l'expression de u_1, possède une asymptote horizontale d'expression $u_1(+\infty) = E_1$. On en déduit $E_1 = 4\,\mathrm{V}$ par lecture graphique.

....

4.15 e) La courbe 3, associée à l'expression de u_2, possède une valeur initiale $u_2(0^+) = \dfrac{1}{2}E_2$. On en déduit $E_2 = 4\,\mathrm{V}$ par lecture graphique. On peut vérifier que l'asymptote donne $u_2(+\infty) = E_2 = 4\,\mathrm{V}$.

....

4.15 f) La courbe 1, associée à l'expression de $i(t)$, a pour ordonnée à l'instant initial $i(0^+) = 3\,\mathrm{mA} = \dfrac{E_1}{R}$ donc on a $R = E_1/i(0^+) \simeq 1{,}3\,\mathrm{k\Omega}$.