Entraînement 4.16 — Équation canonique.

De nombreux circuits du second-ordre sont en fait des oscillateurs dont l'équation canonique est de la forme

$$\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2\,x(t)=f(t),$$

où ω_0 est appelée *pulsation propre* et Q *facteur de qualité*.

Donner la dimension de :

a) ω_0 ....

b) Q ....

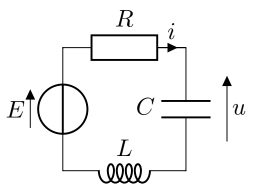
On considère l'équation $RC\dfrac{\mathrm{d}^2i(t)}{\mathrm{d}t^2}+\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}+\dfrac{R}{L}i(t)=0$. Exprimer :

c) ω_0 ....

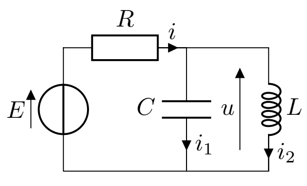
d) Q ....

Entraînement 4.17 — Mise en équation.

On considère les deux circuits suivants, pour lesquels les fém des générateurs de tension E sont constantes.



montage 1



montage 2

À l'aide de la loi des mailles et des nœuds, établir l'équation différentielle vérifiée par la tension u :

a) Dans le montage 1 ....

b) Dans le montage 2 ....

Entraînement 4.18 — Équations type « oscillateur harmonique ».

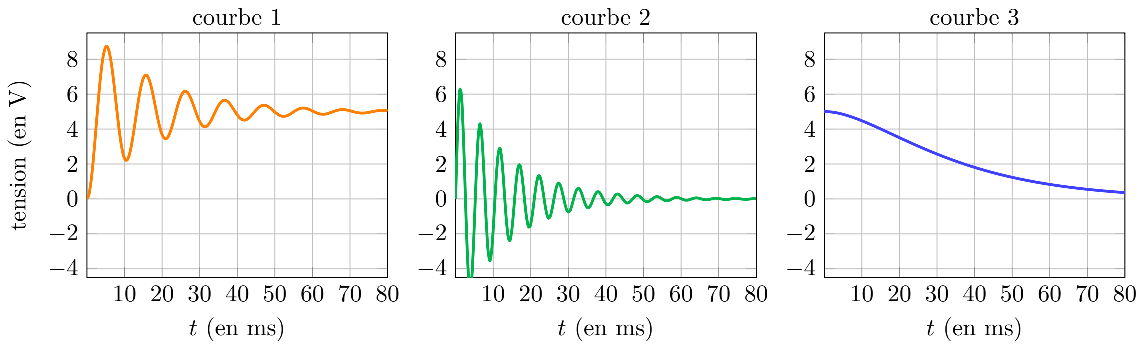
a) Résoudre $\dfrac{\mathrm{d}^2u_C(t)}{\mathrm{d}t^2}+\omega_0^2\,(u_C(t)-E)=0$ avec $\begin{cases}u_C(0)=0\\ \dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(0)=0\end{cases}$.

b) Résoudre $\dfrac{\mathrm{d}^2i(t)}{\mathrm{d}t^2}+\omega_0^2\,i(t)=0$ avec $\begin{cases}i(0)=0\\ \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0)=\dfrac{E}{L}\end{cases}$ ....

Entraînement 4.19 — Réponses d'un circuit du second-ordre.

Les graphes ci-dessous représentent l'évolution de trois tensions $u_1(t)$, $u_2(t)$, et $u_3(t)$ au cours du temps. Toutes ces grandeurs évoluent suivant une équation différentielle du type

$$\frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\, x(t) = \mathrm{C^{te}}.$$



a) Quelle courbe est associée au plus grand facteur de qualité Q ?

(a) courbe 1 (b) courbe 2 (c) courbe 3

. . . .

b) On a

$$u_1(t) = a\mathrm{e}^{-t/\tau_1} - b\mathrm{e}^{-t/\tau_2}.$$

Quelle est la courbe correspondante ?

(a) courbe 1 (b) courbe 2 (c) courbe 3

. . . .

c) On a

$$u_2(t) = E\sin(\Omega t)\,\mathrm{e}^{-t/\tau}.$$

Quelle est la courbe correspondante ?

(a) courbe 1 (b) courbe 2 (c) courbe 3

. . . .

d) On a

$$u_3(t) = E\Big[1 - (\cos(\Omega' t) + a\sin(\Omega' t))\mathrm{e}^{-t/\tau'}\Big].$$

Quelle est la courbe correspondante ?

(a) courbe 1 (b) courbe 2 (c) courbe 3

. . . .

e) Déterminer la valeur numérique de la pseudo-pulsation Ω qui intervient dans $u_2(t)$

. . . .

Réponses mélangées

$u = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + L'\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ — (b) — Q est sans dimension — $\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{R}{L}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{LC}u = \dfrac{E}{LC}$

$\dfrac{CC'}{C+C'}$ — $4\,\mathrm{V}$ — (a), (c) et (d) — $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \dfrac{2}{RC}u = \dfrac{E}{RC}$ — $1{,}2 \times 10^3\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$

$R\sqrt{\dfrac{C}{L}}$ — (a) — $\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{RC}i(t) = 0$ — $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \left(\dfrac{1}{C} + \dfrac{1}{C'}\right)i$ — (a) — (c) et (d)

$[\omega_0] = T^{-1}$ — $i = (C+C')\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ — (b) — $\dfrac{L}{R}$ — $1{,}3\,\mathrm{k\Omega}$ — $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \dfrac{u}{L} + \dfrac{u}{L'}$

$\dfrac{E}{L\omega_0}\sin(\omega_0 t)$ — (c) — 0 — $\dfrac{1}{3}E$ — (c) — 0 — (a) — $\dfrac{RC}{2}$ — 0 — (b)

E — (c) — $i(t) = \dfrac{E}{R}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$ — $u_C(t) = \dfrac{1}{2}E$ — $L+L'$ — (a), (b) et (c) — $\dfrac{2E}{3R}$

$\dfrac{C}{2}$ — (b) — $i = \dfrac{u}{R} + C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ — (a) et (c) — $u_C(t) = E\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)$ — $C+C'$

$\dfrac{E}{R}$ — (b) — $\dfrac{LL'}{L+L'}$ — $\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ — $\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{1}{RC}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{LC}u = 0$ — $\dfrac{E}{R}$ — E

$E \times (1 - \cos(\omega_0 t))$ — $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \dfrac{R}{L}i = \dfrac{E}{L}$ — (b) — $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{RC}u_C = \dfrac{1}{RC}E$ — (a) — $4\,\mathrm{V}$ — L