Suites récurrentes linéaires d'ordre deux

Il s'agit d'exposer des points déjà connus.

Pour $(a,b)\in\mathbb{K}^2$, on note $F_{a,b}(\mathbb{K}) \overset{def}{=} \{(u_n)\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \forall n, u_{n+2}+au_{n+1}+bu_n=0\}$.

En observant qu'un élément de $F_{a,b}(\mathbb{K})$ est déterminé par ses deux premiers termes, on montre que :

Proposition 1 *i)*$F_{a,b}(\mathbb{K})$ *est un sev de* $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$*isomorphe à* $\mathbb{K}^2$.
ii) $\boxed{\dim F_{a,b}(\mathbb{K})=2.}$

On va déterminer une base de $F_{a,b}(\mathbb{K})$ en cherchant les suites géométriques (r^n) de cet espace.

Proposition 2 *Une telle suite appartient à* $F_{a,b}(\mathbb{K})$ *ssi :* $r^2+ar+b=0$ *, équation nommée équation caractéristique de* $F_{a,b}(\mathbb{K})$.

En résumé, le résultat principal est :

Théorème 1 *On désigne par* (E) *l'équation caractéristique de* $F_{a,b}(\mathbb{K})$.
i) Si (E) *admet deux racines différentes* u *et* v *dans* $\mathbb{K}$ *alors :*
$F_{a,b}(\mathbb{K})=Vect((u^n),(v^n))$ *ou encore*
$\boxed{(w_n)\in F_{a,b}(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \exists!\,(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2, \forall n, w_n=\lambda u^n+\mu v^n.}$
ii) Si (E) *admet une racine double* u *alors :*
$F_{a,b}(\mathbb{K})=Vect((u^n),(nu^n))$ *ou encore*
$\boxed{(w_n)\in F_{a,b}(\mathbb{K}) \Leftrightarrow \exists!\,(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2, \forall n, w_n=(\lambda n+\mu)u^n.}$
iii) Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ *et* (E) *admet comme racines non réelles* u *et* $\overline{u}$:
$F_{a,b}(\mathbb{R})=Vect((Re(u^n)),(Im(u^n)))$ *ou encore*
$\boxed{(w_n)\in F_{a,b}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \exists!\,(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2, \forall n, w_n=\lambda Re(u^n)+\mu Im(u^n).}$

Exemple 1 *Soit à déterminer la suite telle que :* $u_0=0, u_1=1$ *et* $u_{n+2}-2u_{n+1}+2u_n=0$,*ce pour tout* n.
On reconnaît une récurrence linéaire d'ordre 2 à termes réels.
L'équation caractéristique associée est : $x^2-2x+5=0$ *dont les racines sont* $r=1+i$ *et* $\overline{r}$. *En observant que* $r=\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$, *il vient* $r^n=e^{\frac{in\pi}{4}}$, *ce pour tout* n; *ainsi* $\exists!\,(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2, \forall n, u_n=2^{n/2}(\lambda\cos\frac{n\pi}{4}+\mu\sin\frac{n\pi}{4})$.
Avec les valeurs de $u_0=0$, *on trouve* $\lambda=0$ *et* $\mu=1$ *grâce à* u_1.
Bilan: $\forall n, u_n=2^{n/2}\sin\frac{n\pi}{4}$.

Exercices 1 *(A faire tout seul, on donne les réponses)*
1) Trouver la suite numérique (v_n) *telle que :* $v_0=2, v_1=3$ *et* $\forall n, v_{n+2}-2v_{n+1}+v_n=0$. *(Rép:* $v_n=n+2$).
2) Trouver la suite numérique (v_n) *telle que :* $v_0=0, v_1=1$ *et* $\forall n, v_{n+2}-5v_{n+1}+6v_n=0$. *(Rép:* $v_n=3^n-2^n$).
3) Soit (u_n) *la suite définie par* $u_0=1, u_1=2$ *et* $\forall n, u_{n+2}=\sqrt{u_{n+1}u_n}$. *Trouver la limite de cette suite.(Rép:*$\sqrt[3]{4}$, *en passant au* $\ln$!*)*