DL1 et son corrigé

1 Enoncé

1.1 Partie Séries

1.1.1 Règle de Cauchy

$\boxed{1}$ Etablir que si $(u_n)^{1/n} \to L \in \overline{\mathbb{R}}$ alors :
i) Si $L < 1, \sum u_n$ converge.
ii) Si $L > 1, \sum u_n$ diverge grossièrement.
iii) $L = 1$, on ne peut conclure.
$\boxed{2}$ Comparer cette règle à celle de D'Alembert.

1.1.2 Règle de Raabe/Duhamel

$\boxed{3}$On suppose que , pour $n \to +\infty$, on dispose du DL suivant : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{a}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$
En utilisant le test géométrique avec les séries de Riemann,établir :
i) $a > 1, \sum u_n$ converge.
ii) $a < 1, \sum u_n$ diverge.
iii) $a = 1$, on ne peut conclure.
$\boxed{4}$ Déterminer la nature des séries de terme général : $u_n = \dfrac{1.3.5.....(2n-1)}{2.4.6...........(2n)}$ puis $u_n = \dfrac{1.3.5.....(2n-1)}{2.4.6...........(2n+2)}$.
et, pour $a > 0, u_n = \dfrac{n!}{a(a+1)....(a+n-1)}$.

1.2 Partie algèbre linéaire

1.2.1 Notations

a) n entier naturel non nul .
b) T est l'ensemble des éléments de $M_n(\mathbb{K})$ de trace nulle.
c) $D = diag(1, 2, ..., n)$.
d) $\mathcal{N}$ est l'ensemble des éléments de $M_n(\mathbb{K})$ qui sont nilpotents.
e) On désigne par Z l'ensemble des matrices de diagonale faite uniquement de 0.

1.2.2 Résultat auxiliaire (et par ailleurs utile)

Soient E un $\mathbb{K}$ ev de dimension finie et $f \in L(E)$ tel que : $(x, f(x))$ lié pour tout x de E $(*)$
$\boxed{0}$ En utilisant $(*)$ sur les éléments d'une base de E , montrer que f est une homothétie de E.

1.2.3 C'est parti!

$\boxed{1}$ On se propose de montrer par récurrence sur n que tout élément de T est semblable à une matrice de diagonale nulle.
a) Initialiser.
b) On suppose la propriété à démontrer vraie au rang $n-1$ et on se donne $A \in T$.
i) Conclure si A est scalaire.
ii) On suppose ici que A n'est pas scalaire , établir que A est semblable à une matrice du type :

$$\begin{pmatrix} 0 & a_2 & \cdots & \cdots & a_n \\ 1 & & & & \\ 0 & & (B) & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix}$$

avec $a_2, ..., a_n$ dans $\mathbb{K}$ et B dans $M_{n-1}(\mathbb{K})$.Conclure aussi.

$\boxed{2}$ En utilisant que $M \to MD - DM$,montrer que $(U, V) \to UV - VU$ réalise une surjection de $(M_n(\mathbb{K}))^2$ sur T.

$\boxed{3}$ Dans cette question $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $A \in T$;vérifier qu'il existe U, V, W de $M_n(\mathbb{C})$ telles que : $A = UVW + jWUV + j^2VWU$.

Proposer,sans démonstration,une généralisation.

$\boxed{4}$ $\mathcal{N}$ est-il un sev de T ? Montrer qu'il engendre T.

$\boxed{5}$ Soit H un hyperplan de $M_n(\mathbb{K})$ avec $n \geq 2$. On suppose que celui-ci ne rencontre pas $GL_n(\mathbb{K})$. Prouver qu'il contient toutes les matrices nilpotentes.En déduire que H rencontre $GL_n(\mathbb{K})$.

2 Solutions

2.1 Partie séries

1) a été corrigée en classe.

2) Il fallait comprendre par là (et cela avait précisé en classe) que dès que la règle de D'Alembert peut s'appliquer, celle de Cauchy peut aussi s'employer.

Si on suppose que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \to L$ alors $\ln(u_{n+1} - \ln(u_n) = v_n \to \ln(L)$ donc en appliquant le lemme de Cesaro à la suite (v_n), on a aussi que $\dfrac{\ln(u_n)}{n} \to \ln(L)$ donc en appliquant le lemme de Cesaro à la suite (v_n), on a aussi que $\dfrac{\ln(u_n)}{n} \to \ln(L)$ soit (en passant à l'exponentielle) que $(u_n)^{1/n} \to L$. Donc dès que D'Alembert permet de trancher, il en va de même de la règle de Cauchy. Cette dernière est même un peu meilleure que la règle de D'Alembert (mais ne permet pas de trancher pour le cas douteux de D'Alembert); il suffit ,par exemple, de considérer la série $\sum u_n$ dont le terme général $u_n = \begin{cases} 2^{-n^2} \text{si} & \text{n = 2p} \\ 3^{-n^2} & \text{sinon} \end{cases}$ (Le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ n'ayant pas de limite, il suffit d'examiner les suites extraites d'indices pairs et impairs).

3)On pose, pour $n \geq 1$, $v_n = n^\alpha u_n$ où $\alpha > 0$ et $\alpha \neq 1$. Alors $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^\alpha (1 - \dfrac{a}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)) = 1 + \dfrac{\alpha - a}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

i) Si $a > 1$, on peut trouver $\alpha > 1$ tel que : $a > \alpha > 1$ et alors $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} \to 1^-$ donc $\exists n_0, \forall n \geq n_0, \dfrac{v_{n+1}}{v_n} \leq 1 \Rightarrow \forall n \geq n_0, v_n \leq v_{n_0}$ et $n^\alpha u_n = O(1)$ et , par la règle $n^\alpha, \sum u_n$ converge.

ii) Si $a < 1$,on peut trouver $\alpha < 1$ tel que $a < \alpha < 1$ et alors $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} \to 1^+$ donc $\exists n_0, \forall n \geq n_0, \dfrac{v_{n+1}}{v_n} \geq 1 \Rightarrow \forall n \geq n_0, u_n \geq \dfrac{v_{n_0}}{n^\alpha}$ et , par comparaison des séries à termes positifs , $\sum u_n$ diverge.

iii) Posons pour $\alpha > 0, n \geq 2 : u_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^\alpha}$alors , pour les mêmes n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{-1} \left(\dfrac{\ln n + \ln(1 + 1/n)}{\ln n}\right)^{-\alpha} = (1 - \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right))(1 + o\left(\dfrac{1}{n}\right))^{-\alpha} = 1 - \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et puisque il peut y avoir convergence ou divergence de $\sum u_n$ suivant le réel α, on ne peut conclure dans le cas où $a = 1$.

4) a) Si $n \to +\infty$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2n+1}{2n+2} = \left(1 + \dfrac{1}{2n}\right)(1 - \dfrac{1}{n}) + o\left(\dfrac{1}{n}\right) = 1 - \dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ donc , par ii) $\sum u_n$ diverge.

b) Si $n \to +\infty$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2n+1}{(2n+4)} = \left(1 + \dfrac{1}{2n}\right)(1 - \dfrac{2}{n}) + o\left(\dfrac{1}{n}\right) = 1 - \dfrac{3/2}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ donc , par i) $\sum u_n$ converge.

c) Si $n \to +\infty$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+1}{a+n} = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)(1 - \dfrac{a}{n}) + o\left(\dfrac{1}{n}\right) = 1 - \dfrac{a-1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ donc si $a > 2, \sum u_n$ converge et si $a < 2$ elle diverge. Regardons si nous pouvons conclure dans le cas $a = 2$; dans ce cas et pour tout n, $u_n = \dfrac{1}{n}$ donc DV.

2.2 Partie Algèbre

0) Déjà corrigée.
1) a)+b)i) Dans les deux cas A est scalaire : $A = \mu I_n \Rightarrow tr(A) = n\mu = 0$ soit $\mu = 0$ et $A = 0_n$ qui est , entre autre , à diagonale nulle.
b) ii) Puisque A n'est pas scalaire , θ l'endomorphisme canoniquement associé à A, n'est pas une homothétie de $\mathbb{K}^n$ donc par 0) (contraposée) il existe x de $\mathbb{K}^n$ tel que $(x, \theta(x))$soit libre et si on complète cette dernière en une base de $\mathbb{K}^n$, la matrice de θ dans cette base possède une forme similaire à celle exigée par l'énoncé . Celle-ci se note M ; représentant θ dans une base , elle est bien semblable à A.Comme $0 = tr(A) = tr(M) = tr(B)$, on peut appliquer à B l'hypoyhèse de récurrence , à savoir $S = Q^{-1}BQ$ avec $Q \in GL_{n-1}(\mathbb{K})$ et S , matrice de même taille et à diagonale nulle. Considérons la matrice par blocs $P = \begin{pmatrix} 1 & 0\cdots & 0 \\ 0\vdots & (Q) & \\ \vdots & & \end{pmatrix}$ qui est inversible avec $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0\cdots & 0 \\ 0\vdots & (Q^{-1}) & \\ \vdots & & \end{pmatrix}$ puis effectuons le produit matriciel par blocs $P^{-1}MP$; ce qui donne $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 0 & (X) \\ 0\vdots & (S) \\ \vdots & \end{pmatrix}$.

Cette matrice étant semblable à M , elle l'est aussi à A et de trace nulle.Ainsi la propriété à vérifier s'en trouve héréditaire et , par récurrence, se valide pour tout entier naturel non nul.
2) $\ell : M \to MD - DM$ appartient à $L(M_n(\mathbb{K}))$ et son noyau est constitué des matrices commutant avec D. Or (m_{ij}) commute avec $D \Leftrightarrow jm_{ij} = im_{ij}$ pour $1 \leq i, j \leq n$ .Ceci équivaut à dire que M est diagonale .Par conséquent $dim(Ker(\ell) = n \Rightarrow$ (formule du rang) $rg(\ell) = n^2 - n$ or $Im(\ell)$ est, par le calcul précédent, inclus dans Z. Mais puisque $\dim Z = n^2 - n$, il vient que $Im(\ell) = Z$.
Considérons alors $X \in T$, grâce à 1): $\exists S \in Z, \exists P \in GL_n(\mathbb{K}), X = P^{-1}SP$ et, parce que $Im(\ell) = Z$,$\exists M \in M_n(\mathbb{K}), S = MD - DM$; il en résulte que $X = P^{-1}(MD - DM)P = P^{-1}MDP - P^{-1}DMP$, on pose alors $U = P^{-1}MP, V = P^{-1}DP$ et $X = UV - VU$, ce qui fournit la surjectivité souhaitée $\square$
3)$\frac{1}{j}A \in T$ et , par 2) il existe deux matrices W, V de $M_n(\mathbb{C})$ telles que : $\frac{1}{j}A = WV - VW \Rightarrow A = jWV + (1 + j^2)VW = UVW + jWUV + j^2VWU$, en prenant $U = I_n$. Une généralisation possible : posons $\tau = \exp(\frac{2i\pi}{m})$ où m entier ≥ 2 et $A \in T$; il existe alors m éléments de $M_n(\mathbb{C})$ $U_1, ...U_m$ tels que: $A = U_1.....U_m + \tau U_m U_1.......U_{m-1} + ... + \tau^{m-1}U_2......U_1$.
4) Non puisque $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont nilpotentes car $A^2 = B^2 = 0_2$ et $A + B$ ne l'est pas car inversible.
Chaque matrice élémentaire E_{ij} où $1 \leq i, j \leq n$ et $i \neq j$ vérifiant $E_{ij}^2 = 0_n$ est nilpotente donc toute matrice de diagonale nulle appartient à $vect(\mathcal{N})$; soit $M \in T$, il existe donc H de Z telle que $M = P^{-1}HP$ où $P \in GL_n(\mathbb{K})$ mais , par ce qui précède , $H = \sum_i a_i N_i$ où I est un ensemble fini ,les a_i étant desscalaires et les N_i des éléments de $\mathcal{N}$,ce pour tout i de I. Ainsi $M = \sum_{i \in I} a_i P^{-1} N_i P$ et comme $P^{-1}N_iP$ est aussi nilpotente, M est bien un élément de $vect(\mathcal{N})$. Nous avons montré que $T \subset vect(\mathcal{N})$.
Inversement montrons que toute matrice nilpotente G est de trace nulle (on vera cours sur la réduction une preuve plus savante et plus rapide), en procédant par récurrence sur l'ordre de la matrice (pour $n = 1$, G est nulle) et en supposant que toute matrice nilpotente d'ordre $n - 1$ est de trace nulle. g est l'endomorphisme canoniquement associé à G, ill n'est pas injectif car $det(G) = 0$; soit alors x non nul dans $Ker(g)$ que l'on complète afin d'obtenir une base b de $\mathbb{K}^n$ ainsi la matrice de g dans cette base est de la forme

A $= \begin{pmatrix} 0 & a_2 & \cdots & \cdots & a_n \\ 0 & & & & \\ 0 & & (B) & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix}$. La nilpotence de G entraîne celle de B; par hypothèse de récurrence $tr(B) = 0 = tr(A) = tr(G)$ (puisque $A \sim G$). La récurrence se poursuit et par double inclusion $T = vect(\mathcal{N})$.
5) Si $H \cap GL_n(\mathbb{K}) = \emptyset$ alors $M_n(\mathbb{K}) = H \oplus Vect(I_n)$ et , si L nilpotente , on peut écrire que $I_n + L = \lambda I_n + M$ où $M \in H$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ soit si $\lambda \neq 1$: $I_n + \frac{1}{\lambda - 1}L = \frac{1}{\lambda - 1}M \in H$ or on a vu que si N nilpotente $I_n + N$ inversible donc l'égalité précédente est absurde et $\lambda = 1$ soit $L = M \in H$. On a bien prouvé que toute matrice

nilpotente était dans H.Par conséquent (cf argument utilisé dans 4)) toute matrice à diagonale nulle est dans H.,montrons maintenant qu'une d'entre elle au moins est inversible . Prenons $f \in L(\mathbb{K}^n)$dont l'effet sur la base canonique est le suivant : $f(e_i) = e_{i+1}$ si $1 \leq i \leq n-1$ et $f(e_n) = e_1$, f transformant $(e_1, ..., e_n)$ en $(e_2, ..., e_n, e_1)$ est un automorphisme , or sa matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & (0) & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est bien à diagonale nulle et elle est inversible. Ceci conduit à une contradiction avec le fait que $H \cap GL_n(\mathbb{K}) = \emptyset$. Cette hypothèse ne tient pas $\blacksquare$