## Polynômes scindés sur $\mathbb{K}$

Soit $P$ un polynôme de degré $n \geq 1$, les assertions suivantes sont équivalentes :

$i) P$ admet toutes ses racines dans $\mathbb{K}$.

$ii) \exists (a, x_1, ...., x_n) \in \mathbb{K}^* \times \mathbb{K}^n, P = a \prod_{i=1}^{n} (X - x_i)$.

$iii)\ n = \sum_{\alpha \text{ racine de } P \text{ dans } \mathbb{K}} m_P(a)$.

Dans l'écriture ii) $a$ est le coefficient dominant de $P$ que l'on peut noter $c_d(P)$ et $x_1, ...., x_n$ est une liste des racines de $P$; elles ne sont pas nécessairement distinctes deux à deux et dans cette liste chaque racine de $P$ apparaît $m$ fois, $m$ étant son ordre de multiplicité relatif à $P$.

Si une de ces propriétés est satisfaite, $P$ est scindé sur $\mathbb{K}$.

★Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ est scindé sur $\mathbb{C}$, cela résulte du théorème de d'Alembert-Gauss qui stipule qu'un tel polynôme possède (au moins) une racine complexe. Le polynôme $X^4 + 1$ n'est en revanche pas scindé sur $\mathbb{R}$.