

Devoir à la maison n° 2

Exercice 1.

1. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{i=0}^{n-1} \binom{p+i}{p} = \binom{p+n}{p+1}.$$

2. Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. En déduire la valeur de :

$$\sum_{i=1}^n \left(\prod_{j=0}^{p-1} (i+j) \right).$$

Exercice 2. On considère la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \sqrt{1 - e^{-x}} \end{cases}$.

1. Déterminer le domaine de dérivabilité de f , et calculer sa dérivée.
2. Dresser le tableau de variations de f , avec ses limites.
3. Tracer l'allure du graphe de f .
4. Montrer que f réalise une bijection de \mathbb{R}_+ dans un intervalle J à déterminer. On note $\varphi = f^{-1}$.
5. Quelle est la monotonie de φ sur J ? Déterminer une expression explicite de φ .
6. Montrer que le graphe de φ admet une tangente en 0, et déterminer l'équation de celle-ci.
7. Tracer l'allure du graphe de φ sur le graphe de la question 3.