Devoir à la maison n° 2
CORRIGÉ

Exercice 1.

1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note P_n l'assertion $\ll \sum_{i=0}^{n-1} \binom{p+i}{p} = \binom{p+n}{p+1} \gg$.

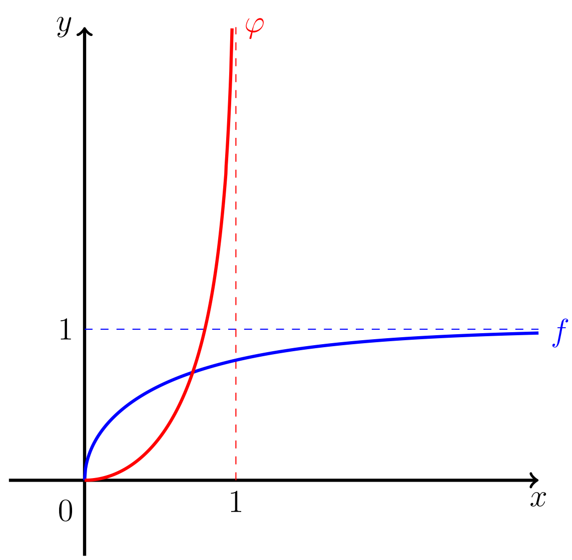
   Pour $n = 1$: $\sum_{i=0}^{0} \binom{p+i}{p} = \binom{p}{p} = 1$ et $\binom{p+1}{p+1} = 1$, donc P_1 est vraie.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons P_n vraie. On a :
   $$\sum_{i=0}^{n-1} \binom{p+i}{p} = \binom{p+n}{p+1},$$
   donc
   $$\sum_{i=0}^{n} \binom{p+i}{p} = \binom{p+n}{p+1} + \binom{p+n}{p},$$
   donc, d'après la formule du triangle de Pascal :
   $$\sum_{i=0}^{n} \binom{p+i}{p} = \binom{p+n+1}{p+1}.$$
   Donc P_{n+1} est vraie. Par récurrence, P_n est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. On a :
   $$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j=0}^{p-1}(i+j)\right) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{(p+i-1)!}{(i-1)!} \\ &\underset{k=i-1}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(p+k)!}{k!} \\ &= p! \sum_{k=0}^{n-1} \binom{p+k}{p} \\ &\underset{\text{d'après 1.}}{=} p! \binom{p+n}{p+1} \\ &= \frac{n(n+1)\cdots(n+p)}{p+1}.\end{aligned}$$

Exercice 2.

1. La fonction f est dérivable lorsque $1 - e^{-x} > 0$, c'est-à-dire lorsque $x > 0$. Le domaine de dérivabilité de f est donc $\mathbb{R}_+^*$. On a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \dfrac{e^{-x}}{2\sqrt{1-e^{-x}}}$.
2. D'après la question 1 : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) > 0$. Comme $f(0) = 0$ et que $e^{-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a le tableau :

x	0 $\qquad\qquad +\infty$
$f'(x)$	$\|\|$ $\quad +$
f	$0 \nearrow 1$

3. et 7.



4. Comme f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, d'après le théorème de la bijection monotone, f est injective sur $\mathbb{R}_+$.
Comme f est continue et croissante sur $\mathbb{R}_+$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $f(\mathbb{R}_+) = [f(0), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[= [0,1[$. Donc f est surjective de $\mathbb{R}_+$ dans $[0,1[$.
Donc f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $J = [0,1[$.
5. D'après le théorème de la bijection monotone, φ a même sens de variation que f, donc φ est strictement croissante sur J. Soit (x,y) dans $\mathbb{R}_+ \times J$:
$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \sqrt{1-e^{-x}} \Leftrightarrow 1 - e^{-x} = y^2 \Leftrightarrow e^{-x} = 1 - y^2 \Leftrightarrow x = -\ln(1-y^2).$$
Donc : $\forall y \in J,\ \varphi(y) = -\ln(1-y^2)$.
6. Comme $\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, φ est dérivable sur J, et : $\forall y \in J,\ \varphi'(y) = \dfrac{2y}{1-y^2}$. La tangente en 0 au graphe de φ a donc pour équation : $y = \varphi'(0)(x-0) + \varphi(0) = 0$.