Chapitre 2 : Suites Numériques

Table des matières

1 Génération et représentation d'une suite

1.1 Généralités

Définition 1 (Suite de nombres réels).

- Une *suite numérique* u est une fonction définie sur $\mathbb{N}$ (ou à partir d'un certain entier naturel p), qui, à tout entier naturel n (ou pour tout $n \geqslant p$), associe le réel noté $u(n)$ ou u_n.
- On dit que u_n est le *terme de rang* n, on dit aussi *le terme général* de la suite.
- La suite u est généralement notée (u_n).

Remarque 1 (Attention aux notations).

Ne pas confondre les notations u_n qui est le terme de rang n (donc un nombre réel) et (u_n) qui est la liste (infinie en général) des termes de la suite.

■ **Exemple 1:**

- Si la suite u est définie sur $\mathbb{N}$ alors le 1er terme est u_0, le 2ème terme est u_1, etc. . .
- Si la suite est définie sur $\mathbb{N}^*$ alors le 1er terme est u_1, le 2ème terme est u_2, etc. . .
- Si la suite est définie pour tout entier naturel $n \geqslant 4$, alors le 1er terme est u_4, le 2ème terme est u_5, etc. . .
- Le terme qui précède le terme u_n est le terme u_{n-1}, le terme qui suit u_n est le terme u_{n+1}.

1.2 Suite définie de façon explicite

Définition 2.

Lorsqu'une suite (u_n) est définie par son terme général u_n en fonction de n, indépendamment des termes précédents, on dit que la suite est définie de *façon explicite*.

■ Exemple 2:

Soit (u_n) la suite définie, pour tout entier naturel n tel que $n \geqslant 3$ par $u_n = \dfrac{2n-1}{n-2}$. On peut calculer u_{50}, u_{100}.

Remarque 2 (À propos de la définition explicite)**.**

C'est l'écriture d'une suite comme une fonction de n : $u_n = f(n)$. Ce point de vue sera utile pour utiliser les outils des fonctions pour étudier le comportement de la suite.

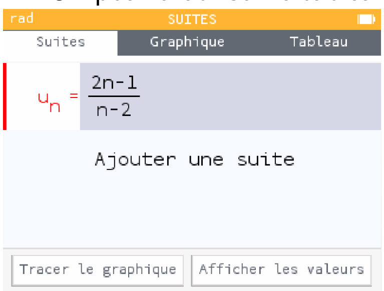
Définition 3 (Représentation graphique sous forme de nuage de points)**.**

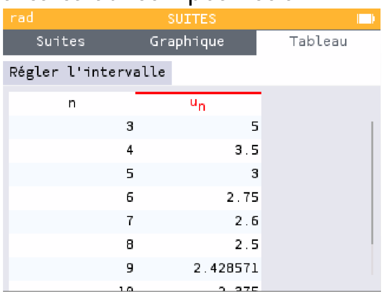
Soit (u_n) est une suite définie de façon explicite, telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$, où f est une fonction. La représentation graphique de la suite u est l'ensemble des points du plan de coordonnées $(n\,;\,u_n)$.

► Exercice 1

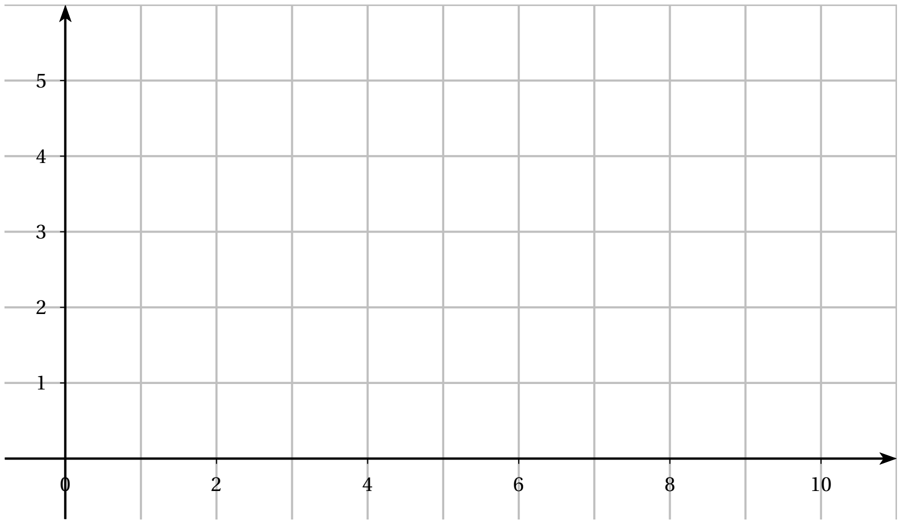
Dans le repère orthonormé suivant, tracer la représentation graphique de l'exemple précédent :$u_n = \dfrac{2n-1}{n-2}$.

On pourra utiliser le tableur de la calculatrice[1] pour cela.





1. Oui…je sais la calculatrice c'est mal…



1.3 Suite définie par récurrence

Définition 4.

Lorsqu'une suite (u_n) est définie par **son premier terme** et une relation exprimant chaque terme **en fonction du précédent**, on dit que la suite est définie par une *relation de récurrence*. On peut alors noter, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, et on appelle f la *fonction de récurrence*.

▶ Exercice 2

On définit la suite (u_n) par $u_0 = 4$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0{,}5u_n + 6$.

Calculer les valeurs exactes des quatre premiers termes de la suite, puis donner les valeurs arrondies à 10^{-3} des quatre termes suivants, à l'aide de la calculatrice.

Définition 5 (Représentation graphique d'une suite récurrente).

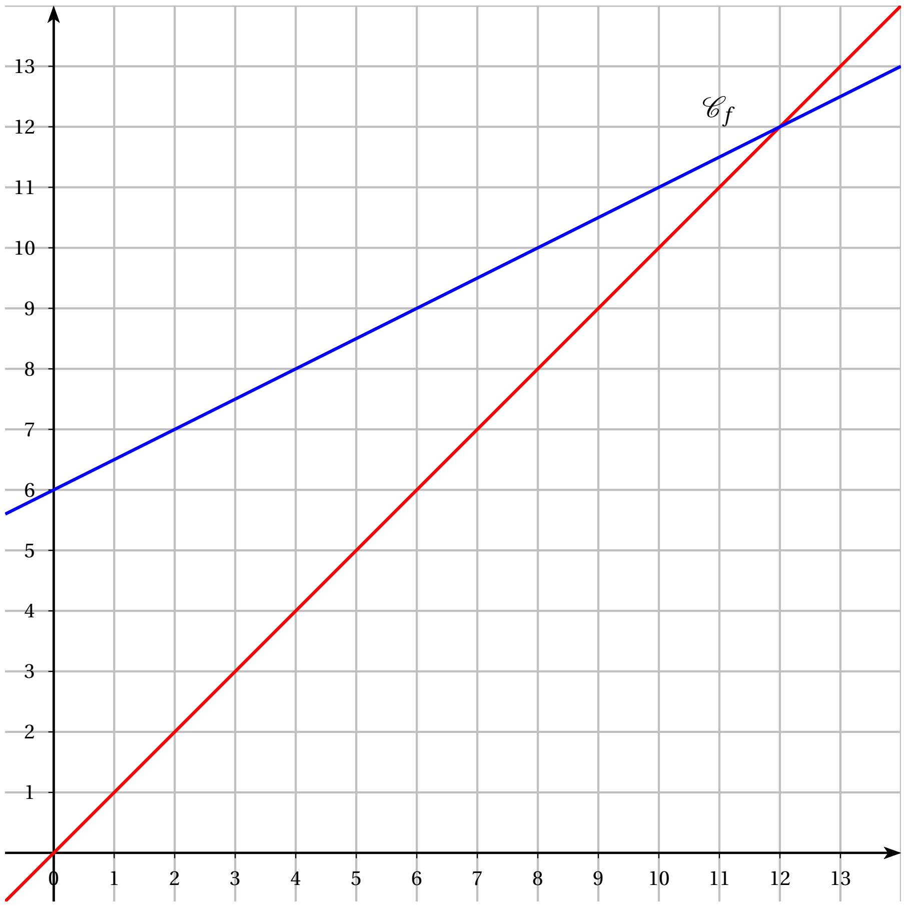
Soit (u_n) une suite définie par son premier terme u_0 et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est une fonction.

- Tracer dans un même repère la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f et la droite Δ d'équation $y = x$.
- Placer u_0 sur l'axe des abscisses.
- Sachant que $u_1 = f(u_0)$, construire u_1, l'image de u_0 en utilisant la courbe $\mathscr{C}_f$.
- Reporter u_1 sur l'axe des abscisses en utilisant la droite Δ.
- Sachant que $u_2 = f(u_1)$, construire u_2, l'image de u_1 en utilisant la courbe $\mathscr{C}_f$.
- Reporter u_2 sur l'axe des abscisses en utilisant la droite Δ.
- Etc...

▶ Exercice 3

Dans le repère orthonormal fourni ci-dessous, construire la représentation graphique de l'exemple

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 0,5u_n + 6 \end{cases}$$



Remarque 3.

Tous les termes de u_n sont représentés sur un seul axe : l'axe horizontal.

Remarque 4.

Les suites sont souvent définies par récurrence : on peut souvent prévoir, connaissant un phénomène, ce qui va se produire immédiatement après. Le problème est la connaissance à long terme de ces suites. On ne peut pas prédire au départ quelles seront les valeurs de la suite quand n deviendra grand : limites, variations.

2 Suites arithmétiques

2.1 Définition

Définition 6 (Suite arithmétique).

On dit que la suite u est une *suite arithmétique* s'il existe un nombre réel r tel que, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$. r est appelée la *raison* de la suite.

■ Exemple 3:

Les suites de nombres pairs et impairs sont des suites arithmétiques. *Préciser premier terme et raison.*

Propriété 1 (Écriture du terme général d'une SA).

Toute suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r a son terme général qui s'écrit sous la forme $u_n = u_0 + nr$, $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration

À connaître.

□

Méthode 1 (Reconnaître une SA)
Pour prouver qu'une suite est arithmétique,

- On exprime u_n sous la forme $a \times n + b$.
- On exprime u_{n+1} en fonction de u_n sous la forme $u_{n+1} = u_n + r$, r fixé.
- On calcule la différence $\boldsymbol{u_{n+1} - u_n}$, si la différence est une constante, alors la suite est arithmétique.

2.2 Somme des premiers entiers

Propriété 2.

La somme des n premiers entiers est égale à $S_n = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

Démonstration

À connaître.

□

▶ Exercice 4 Somme des termes d'une suite arithmétique

Si (u_n) est une suite **arithmétique** de premier terme u_0 et de raison r, démontrer que

$$S_n = \boxed{u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \underbrace{(n+1)}_{\text{nb. termes}} \times \underbrace{\frac{u_0 + u_n}{2}}_{\text{moy. prem/dernier termes}}}$$

Démonstration

Soit x le premier terme de la suite arithmétique, y le dernier terme, et r la raison. Alors si on énumère les p termes de la suite on obtient :

- Du premier au dernier : $x,\ x+r,\ x+2r,\ \ldots,\ x+(p-1)r$
- Du dernier au premier : $y,\ y-r,\ y-2r,\ \ldots,\ y-(p-1)r$

La somme des termes des deux listes est égale à $2S$, et la somme des termes écrits l'un sous l'autre donne $p \times (x+y)$, ainsi,

$$S = p\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

□

Remarque 5.

Vous pouvez retenir cette formule, mais en pratique, on utilisera plutôt la linéarité de la somme et la formule de la propriété 2. qui donne la somme des entiers entre 1 et n.
En terme d'applications, on est amené à faire beaucoup de sommes de ce type lorsqu'on fait des calculs de probabilités (espérances, variances).

■ **Exemple 4:**

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme 2 et de raison 3. Alors $u_n = 2+3n$. Si on veut calculer la somme des 10 premiers termes :

$$\sum_{k=0}^{9} u_k = \sum_{k=0}^{9} 2+3k = \sum_{k=0}^{9} 2+3\sum_{k=0}^{9} k = 10\times 2+3\times\frac{10\times 9}{2} = 155$$

3 Suites géométriques

3.1 Définition

Définition 7.

On dit que la suite u est une *suite géométrique* s'il existe un nombre réel q tel que, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \times q$. q est appelée la *raison* de la suite.

■ **Exemple 5:**

La suite des inverses des puissances de 2 est géométrique. Quelle est la raison ?
La population mondiale subit une augmentation de $1,14\%$ par an. C'est donc une suite géométrique. Quelle est la raison ? ?

Propriété 3 (Écriture du terme général d'une SG).

Toute suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q a son terme général qui s'écrit sous la forme $u_n = u_0 \times q^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Méthode 2 (Reconnaître une SG)
Pour savoir si une suite est géométrique, on exprime u_{n+1} en fonction de u_n. Si u_{n+1} est égal au produit de u_n par une constante, alors elle est géométrique.

Un grand classique des exercices de lycée consiste à se ramener à une suite géométrique ou arithmétique en partant d'une suite qui ne l'est pas.

▶ Exercice 5 — Suite arithmético-géométrique — À savoir refaire les yeux fermés

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{4}$$

1. Calculer u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Géométrique ?
2. On pose, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - \frac{1}{2}$
   Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. Donner son premier terme et sa raison.
3. En déduire une expression de v_n en fonction de n, puis une expression de u_n en fonction de n.

3.2 Somme des puissances d'un nombre

Propriété 4.

Soit q un nombre réel

- Si $q = 1$, alors $S_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = n + 1$
- Si $q \neq 1$ alors $S_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

<u>**Démonstration**</u>

À connaître.

□

▶ Exercice 6 — Somme des termes d'une suite géométrique

Justifier que si (u_n) est une suite géométrique, alors

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Application : calculer la somme $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}$. Estimer la valeur limite de la somme lorsque n tend vers $+\infty$.