Feuille de TD n°2
TD — Suites numériques

1 On définit les suites (u_n) et (v_n) de la façon suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{3n-4}{2n+1}$ et $v_0 = 1$ et $v_{n+1} = \dfrac{3u_n - 4}{2u_n + 1}$.
Calculer les quatre premiers termes des suites (u_n) et (v_n).

2 Soit (u_n) la suite définie par $u_n = n^2 - n + 1$

1. Calculer u_0 et u_{10}.
2. Exprimer, en fonction de n, $u_n + 1$ et u_{n+1}.

3 Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 4$ et de raison $r = \dfrac{1}{2}$.

1. Exprimer u_n en fonction de n.
2. Calculer u_{10}.

4 Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 7$ et de raison $q = 3$.

1. Exprimer u_n en fonction de n.
2. Calculer u_5.

5 On suppose que chaque année, la production d'une usine subit une baisse de 4 %.
Au cours de l'année 2000, la production a été de 25 000 unités.

1. On note $P_0 = 25000$ et P_n la production prévue au cours de l'année $(2000 + n)$.
   Montrer que (P_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
2. Calculer la production de l'usine en 2023.

6 Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_4 = 5$ et $u_{11} = 19$.
Calculer la raison r et le premier terme u_0.

7 Quelle forme choisir ?
Une variété de bambou grandit de 6 cm par jour. On achète dans un magasin un spécimen de 20 cm.
On note u_n la taille du bambou au bout de n journées, où n est un nombre entier.

1. Justifier que (u_n) est arithmétique et préciser le premier terme et la raison.
2. Donner l'écriture de son terme général.
3. Donner les quatre premiers termes de la suite (u_n).
4. Calculer u_{84}.

8 algorithme
Écrire un programme en Python qui permet l'affichage des 10 premiers termes de la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 20 \\ u_{n+1} = u_n + 6 \end{cases}$$

Écrire une fonction en Python qui permet de donner la valeur d'un terme choisi d'une suite arithmétique que l'on peut définir également. Par exemple la commande `arith(20,6,84)` renvoie la valeur u_{84} de la suite définie ci-dessus.

9 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 1}{u_n + 1}$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3. Donner les valeurs exactes.
2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$
   (a) Démontrer que (v_n) est une suite arithmétique
   (b) En déduire une expression de v_n en fonction de n pour tout n entier.
   (c) En déduire une expression de u_n en fonction de n.
3. Calculer u_{100}
4. Conjecturer la limite de la suite (u_n).

10 Soit (u_n) la suite définie par
$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{3} \\ u_{n+1} = \dfrac{n+1}{3n} u_n \end{cases}$$

1. Calculer u_2, u_3, u_4 et u_5.
2. Démontrer que la suite de terme général $v_n = \dfrac{u_n}{n}$ est une suite géométrique.
3. En déduire l'expression de v_n en fonction de n puis celle de u_n.

11 **(*)**On considère la suite définie par $u_0 = a$ et la relation de récurrence

$$(R) \qquad u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + n^2 + n$$

1. Déterminer un polynôme P du second degré, de façon à ce que la suite de terme général $\alpha_n = P(n)$ vérifie la relation (R).
2. Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - \alpha_n$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
3. Donner l'expression de v_n en fonction de n et de a, puis celle de u_n.

12 **(**) Les singes et les noix de coco**
« Le premier singe prit la moitié des noix de coco, plus une.
Le deuxième prit la moitié du reste plus deux
Le troisième prit la moitié du reste plus trois…
Le N^e et dernier prit la moitié du reste précédent, plus N. »

Déterminer en fonction de N le nombre total x de noix de coco.

Voir indications dans le corrigé.

13

1. La suite (v_n) est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = (n-1)^3$
   (a) Calculer les 3 premiers termes de la suite (v_n). Que pourrait-on supposer?
   (b) Démontrer que la suite v n'est pas arithmétique.
2. La suite (u_n) est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = (n+3)^2 - n^2 - 7$.
   Démontrer qu'elle est arithmétique. Préciser le premier terme et la raison.

14 Une suite arithmétique a pour premier terme 13 et pour centième terme 2011.
Calculer la moyenne des 100 premiers termes de cette suite.

15 On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ arithmétique. Montrer que la suite (v_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 2^{u_n}$ est géométrique, préciser le premier terme et la raison.

16 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{3+2u_n}$.

1. À l'aide de la calculatrice, conjecturer les variations et la limite éventuelle de la suite (u_n).
2. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{3}{u_n}$
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique. Préciser son premier terme et sa raison.
   (b) En déduire une expression de v_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. En déduire une expression de u_n en fonction de n puis vérifier les conjectures émises dans la première question.

17 Pour s'entraîner : $u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{1+2u_n}$ et $u_0 = \dfrac{1}{2}$. Montrer que la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{u_n}{u_n - 1}$ est géométrique.
Exprimer u_n en fonction de v_n, puis en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{3^n}{3^n+1}$.

18 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n - 4n + 2$.

1. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 2n$. En déduire la limite de la suite (u_n)
2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 2n$
   (a) Démontrer que (v_n) est géométrique. Préciser le premier terme et la raison.
   (b) En déduire l'expression de v_n en fonction de n puis celle de u_n.
3. Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.
   Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \dfrac{3^{n+1}-1}{2} + n(n+1)$.

Feuille de TD n°2
Réponses ou Solutions

1

	0	1	2	3	4
u_n	-4	$-0,333$	$0,4$	$0,714$	$0,889$
v_n	1	$-0,333$	-15	$1,689$	$0,244$

2 $u_0 = 1$ et $u_{10} = 91$, $u_n + 1 = n^2 - n + 2$ et $u_{n+1} = n^2 + n + 1$

6 $r = 2$, $u_0 = -3$.

7

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 6$, $u_0 = 20$, donc (u_n) est arithmétique de raison 6 et de premier terme 20.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 20 + 6n$
3. $u_{84} = 20 + 6 \times 84 = 524$, soit 5,24 m au bout de 84 jours.

8

```
def arith(u0,r,n):
u=u0   for i in range(n):       u=u+r   return u
```

9

1. $u_1 = \dfrac{5}{3}$, $u_2 = \dfrac{3}{2}$, $u_3 = \dfrac{7}{5}$
2. $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$
   (a) Pour montrer que (v_n) est arithmétique, on exprime v_{n+1} en fonction de v_n.
   $$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{1}{u_{n+1} - 1} \\ &= \frac{1}{\frac{3u_n - 1}{u_n + 1} - 1} \\ &= \frac{1}{\frac{2u_n - 2}{u_n + 1}} \\ &= \frac{u_n + 1}{2u_n - 2} \end{aligned}$$
   Or, $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1} \iff u_n - 1 = \dfrac{1}{v_n} \iff \boxed{u_n = \dfrac{1}{v_n} + 1 = \dfrac{v_n + 1}{v_n}}$
   Ainsi, $v_{n+1} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\frac{v_n+1}{v_n} + 1}{\frac{v_n+1}{v_n} - 1} = \dfrac{1}{2}\dfrac{2v_n + 1}{1} = v_n + \dfrac{1}{2}$
   Et donc (v_n) est arithmétique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = \dfrac{1}{u_0 - 1} = 1$.
   (b) Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 1 + \dfrac{1}{2}n$
   (c) On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{v_n + 1}{v_n} = \dfrac{2 + \frac{1}{2}n}{1 + \frac{1}{2}n} = \dfrac{4 + n}{2 + n}$.
3. $u_{100} = \dfrac{104}{102}$
4. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

12 Indications :
Soit r_n le nombre de noix de coco restantes après le n^{e} singe ($0 \leqslant n \leqslant N$, en convenant que $r_0 = x$)

1. Démontrer que $\begin{cases} r_0 = x \\ r_n = \dfrac{r_{n-1}}{2} - n \end{cases}$ pour $1 \leqslant n \leqslant N$
2. Étudier la suite (u_n) : $u_n = r_n + 2n - 2$. (Chercher une relation de récurrence entre u_n et u_{n-1}.)
3. En déduire l'expression de r_n en fonction de n et de x.
4. En déduire que $x = 2^{N+1}(N-1) + 2$.

13

1. (a) $u_0 = -1$, $u_1 = 0$, $u_2 = 1$. La suite pourrait être arithmétique de raison 1 et de premier terme -1.
   (b) $u_{n+1} - u_n = n^3 - n^3 - 3n^2 + 3n - 1 = 3n^2 - 3n + 1$ non constant, donc (u_n) n'est pas arithmétique.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 6n + 2$ donc (u_n) est arithmétique de premier terme 2 et de raison 6.

14 On a $u_0 = 13$ et $u_{99} = 2011$. La somme des 100 premiers termes, c'est $S_{99} = 100 \times \dfrac{u_0 + u_{99}}{2}$, la moyenne c'est la somme divisée par 100, soit $\overline{m} = \dfrac{u_0 + u_{99}}{2} = \dfrac{2024}{2} = 1012$

15 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$ donc $v_n = 2^{u_0 + nr} = 2^{u_0} \times \left(2^r\right)^n$, donc (v_n) est géométrique de premier terme 2^{u_0} et de raison 2^r.

16 $v_{n+1} = \dfrac{3}{u_{n+1}} = \dfrac{3}{\frac{3u_n}{3+2u_n}} = \dfrac{3 + 2u_n}{u_n} = \dfrac{3}{u_n} + \dfrac{2u_n}{u_n} = v_n + 2$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{3}{1 + 2n}$, décroissante, tend vers 0.

17 $v_{n+1} = 3v_n$, $u_n = \dfrac{v_n}{v_n + 1}$

18

1. hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}_n$ est vraie, donc $u_n \geqslant 2n$.
   Ainsi, $3u_n \geqslant 6n$ donc $u_{n+1} = 3u_n - 4n + 2 \geqslant 2n + 2 \geqslant 2(n+1)$. Donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
2. (v_n) est géométrique de raison 3.
3. On utilise la linéarité de la somme.