Devoir à la maison n° 3

Exercice 1.

On rappelle qu'un triangle ABC est direct *si les points A, B et C sont placés dans cet ordre lorsqu'on tourne dans le sens direct (=antihoraire).*

1. On considère trois points distincts A, B et C dans le plan, d'affixes respectives a, b et c.
   (a) Soit M un point du plan d'affixe z, et soit M' l'image de M par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Donner son affixe z' en fonction de z.
   (b) On note $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Montrer que $1 + j + j^2 = 0$ et que $e^{i\frac{\pi}{3}} = -j^2$.
   (c) Montrer que le triangle ABC est équilatéral direct si et seulement si $a+bj+cj^2 = 0$.
2. Soit ABC un triangle direct quelconque. On construit les points P, Q et R de sorte que les triangles APB, BQC et CRA soient équilatéraux directs (ainsi, ces trois triangles sont à l'extérieur du triangle ABC). On appelle F, G et H les centres de gravité respectifs de ces trois triangles.
   (a) Faire un dessin.
   (b) On note a l'affixe de A, b l'affixe de B, et ainsi de suite. Déterminer f en fonction de a, p et b ; g en fonction de b, q et c ; et h en fonction de c, r et a.
   (c) En utilisant les résultats des questions 1b, 1c et 2b :
      i. Montrer que les triangles ABC et FGH ont même centre de gravité.
      ii. Montrer que le triangle FGH est équilatéral direct.

Exercice 2. On considère la fonction $f : x \mapsto \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f. Montrer que f est continue sur D_f.
2. Déterminer les intervalles sur lesquels f est dérivable.
3. Déterminer les variations de f, et dresser son tableau de variations.
4. Montrer qu'il existe deux intervalles fermés I_1 et I_2 sur lesquels f est de la forme $x \mapsto -2\arcsin(x) + c_i$, où c_i est une constante à déterminer sur chaque intervalle I_i. Montrer de même que sur un troisième intervalle fermé I_3, f est de la forme $x \mapsto 2\arcsin(x) + c_3$.
5. Déterminer les dérivées à droite et à gauche de f en $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ et en $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
6. Tracer la courbe de f.