Devoir surveillé n° 2

Durée : 3 heures. Calculatrices non autorisées.
La notation tiendra largement compte de la qualité de la rédaction.
Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre souhaité.
Les exercices qui ne sont pas traités dans l'ordre doivent être rédigés sur des copies séparées.
Le sujet et le brouillon ne sont pas à rendre. Le barème est indicatif.

Exercice 1. *(8 points)* On considère la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{-x^2} \end{array} \right.$.

1. Montrer que f est paire.
2. Déterminer le domaine de dérivabilité de f, et calculer sa dérivée.
3. Dresser le tableau de variations de f, avec ses limites. Tracer la courbe de f.
4. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans un intervalle J à déterminer. On note $\varphi = f^{-1}$.
5. Quelle est la monotonie de φ sur J ? Déterminer une expression explicite de φ.
6. Montrer que la courbe de φ admet une tangente en $\frac{1}{e}$, et déterminer l'équation de celle-ci.
7. Tracer la courbe de φ sur le dessin de la question 3.
8. Soit $x \in \mathbb{R}_-^*$. Calculer $\varphi \circ f(x)$.

Exercice 2. *(6 points)* Soit z un nombre complexe de module 1. On note x sa partie réelle.

1. Montrer que : $0 \leq \left|1 + z - \frac{z^2}{2}\right| \leq \frac{5}{2}$.
2. (a) Déterminer la partie réelle de z^2 en fonction de x uniquement.
   (b) En déduire que : $\left|1 + z - \frac{z^2}{2}\right|^2 = -2x^2 + x + \frac{13}{4}$.
   (c) En déduire que : $\frac{1}{2} \leq \left|1 + z - \frac{z^2}{2}\right| \leq \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Exercice 3. *(6 points)* On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n}{k}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k}$.
2. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in [\![1, n+1]\!], \quad \frac{1}{k}\binom{n}{k-1} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k}$.
   (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_{n+1} - S_n = \frac{1}{n+1}$.
   (c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Problème. *(10 points)* On souhaite montrer que les solutions complexes de l'équation :

$$4z^6 + 3iz^5 + 3iz - 4 = 0 \qquad (E)$$

sont toutes de module 1. On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.

I. 1. Justifier que (E) admet une solution complexe.

2. Montrer que (E) n'admet pas de solution réelle.

3. Soit $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, montrer que :

$$\omega + \frac{1}{\omega} \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; \omega \in \mathbb{U}.$$

4. En étudiant la fonction $f : x \mapsto x + \dfrac{1}{x}$, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \; \left| x + \frac{1}{x} \right| \geq 2.$$

II. Soit z une solution de (E). Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $z = i\alpha$.

1. Montrer que $\alpha \neq 0$.

2. Montrer que α est solution de l'équation :

$$4\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^3 + 3\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2 - 12\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) - 6 = 0.$$

3. Dresser le tableau de variations de la fonction $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 4x^3 + 3x^2 - 12x - 6 \end{array} \right.$.

On notera $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{17}}{4}$ et $x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{17}}{4}$. On donne :

$$x_1 \simeq -1,3, \quad x_2 \simeq 0,8, \quad g(x_1) \simeq 5,9, \quad g(x_2) \simeq -11,6.$$

4. En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet trois solutions distinctes dans l'intervalle $]-2, 2[$.

5. En déduire que $\alpha \in \mathbb{U}$.

6. Conclure.