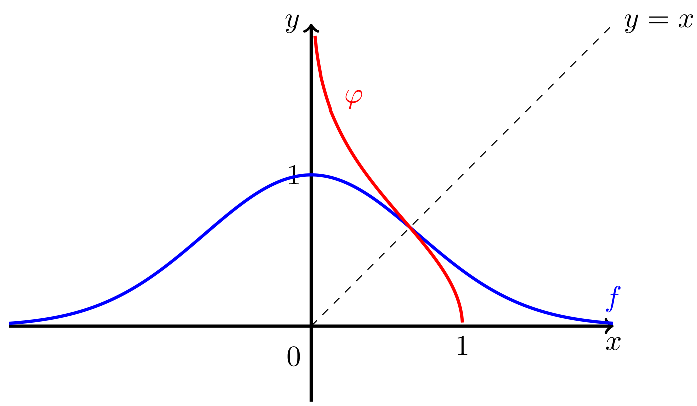
Devoir surveillé n° 2
CORRIGÉ

Exercice 1.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $f(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} = f(x)$, donc f est paire.
2. La fonction f est la composée de $x \mapsto -x^2$ par $x \mapsto e^x$, fonctions usuellement dérivables sur $\mathbb{R}$. Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -2xe^{-x^2}$.
3. et 7.
   Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la question précédente : $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$.
   De plus, $f(0) = e^0 = 1$ et $f(x) \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} 0$, d'où le tableau :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$	
f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0



4. D'après la question précédente, f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$. D'après le théorème de la bijection monotone, f est donc injective sur $\mathbb{R}_+$.
   De plus, f est continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+$, donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $f(\mathbb{R}_+) = \left] \lim_{x \to +\infty} f(x), f(0) \right] =]0, 1]$.
   D'après le théorème de la bijection monotone, f réalise donc une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $J =]0, 1]$.
5. D'après le théorème de la bijection monotone, φ a même sens de variation que f, donc φ est strictement décroissante sur J. Soit (x, y) dans $\mathbb{R}_+ \times J$:
   $$y = f(x) \Leftrightarrow y = e^{-x^2} \Leftrightarrow -x^2 = \ln(y) \Leftrightarrow x = \sqrt{-\ln(y)}.$$
   Donc : $\forall y \in J,\ \varphi(y) = \sqrt{-\ln y}$.
6. La fonction φ est la composée de $-\ln$ par $\sqrt{\ }$, usuellement dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc φ est dérivable lorsque $-\ln(y) \neq 0$, c'est-à-dire sur $]0, 1[$. En particulier, φ est dérivable en $\dfrac{1}{e}$ donc admet une tangente en ce point. On a :
   $$\forall y \in]0, 1[,\ \varphi'(y) = \frac{-\frac{1}{y}}{2\sqrt{-\ln y}} = -\frac{1}{2y\sqrt{-\ln y}},$$

donc $\varphi'\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{e}{2}$. La tangente à la courbe de φ en $\frac{1}{e}$ a alors pour équation :

$$\begin{aligned} y &= \varphi'\left(\frac{1}{e}\right)\left(x - \frac{1}{e}\right) + \varphi\left(\frac{1}{e}\right) \\ &= -\frac{e}{2}\left(x - \frac{1}{e}\right) + 1 \\ &= -\frac{e}{2}x + \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

8. Comme f est paire, $f(x) = f(-x)$. Or $-x \in \mathbb{R}_+$ donc, comme $\varphi \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_+}$:

$$\varphi \circ f(x) = \varphi \circ f(-x) = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_+}(-x) = -x.$$

Exercice 2.

1. Par définition du module, $\left|1 + z - \frac{z^2}{2}\right| \geq 0$. De plus, par inégalité triangulaire :

$$\left|1 + z - \frac{z^2}{2}\right| \leq |1| + |z| + \frac{|z|^2}{2} \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}.$$

2. (a) Notons $z = x + iy$, on a : $z^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy$, et comme $|z| = 1$: $x^2 + y^2 = 1$. Par conséquent :

$$\mathrm{Re}(z^2) = x^2 - y^2 = x^2 - (1 - x^2) = 2x^2 - 1.$$

   (b) On a :

$$\begin{aligned} \left|1 + z - \frac{z^2}{2}\right|^2 &= \left(1 + z - \frac{z^2}{2}\right)\left(1 + \overline{z} - \frac{\overline{z}^2}{2}\right) \\ &= 1 + \overline{z} - \frac{\overline{z}^2}{2} + z + z\overline{z} - \frac{z\overline{z}^2}{2} - \frac{z^2}{2} - \frac{z^2\overline{z}}{2} + \frac{z^2\overline{z}^2}{4} \\ &= 1 + 2\mathrm{Re}(z) - \mathrm{Re}(z^2) + |z|^2 - \mathrm{Re}(z)|z| + \frac{|z|^2}{4} \\ &= 1 + 2x - (2x^2 - 1) + 1 - x + \frac{1}{4} \\ &= -2x^2 + x + \frac{13}{4}. \end{aligned}$$

   (c) Comme $|z| = 1$, $x \in [-1, 1]$. Étudions la fonction $f : x \mapsto -2x^2 + x + \frac{13}{4}$ sur $[-1, 1]$: c'est une fonction polynomiale, donc dérivable, et : $\forall x \in [-1, 1],\ f'(x) = -4x + 1$. La fonction f est donc croissante sur $\left[-1, \frac{1}{4}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{1}{4}, 1\right]$. On a donc :

$$\begin{aligned} f([-1,1]) &= f\left(\left[-1, \frac{1}{4}\right]\right) \cup f\left(\left[\frac{1}{4}, 1\right]\right) \\ &= \left[f(-1), f\left(\frac{1}{4}\right)\right] \cup \left[f(1), f\left(\frac{1}{4}\right)\right] \\ &= \left[\frac{1}{4}, \frac{27}{8}\right] \cup \left[\frac{9}{4}, \frac{27}{8}\right] \\ &= \left[\frac{1}{4}, \frac{27}{8}\right]. \end{aligned}$$

   Par conséquent :

$$\frac{1}{4} \leq \left|1 + z - \frac{z^2}{2}\right|^2 \leq \frac{27}{8},$$

   c'est-à-dire :

$$\frac{1}{2} \leq \left|1 + z - \frac{z^2}{2}\right| \leq \sqrt{\frac{27}{8}} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Exercice 3.

1. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k} - \left(-\binom{n}{0}\right)\\
&= -\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\binom{n}{k} + 1\\
&= -(1-1)^n + 1 \qquad \text{d'après la formule du binôme de Newton}\\
&= 1.
\end{aligned}$$

2. (a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, n+1]\!]$. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k}\binom{n}{k-1} &= \frac{1}{k}\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}\\
&= \frac{n!}{k!(n-k+1)!}\\
&= \frac{1}{n+1}\frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!}\\
&= \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k}.
\end{aligned}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\begin{aligned}
S_{n+1} - S_n &= \frac{(-1)^n}{n+1}\binom{n+1}{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\left(\binom{n+1}{k} - \binom{n}{k}\right)\\
&= \frac{(-1)^n}{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n}{k-1} \qquad \text{d'après la formule du triangle de Pascal}\\
&= \frac{(-1)^n}{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{n+1}\binom{n+1}{k} \qquad \text{d'après le résultat précédent}\\
&= \frac{1}{n+1}\left((-1)^n + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n+1}{k}\right)\\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}\binom{n+1}{k}\\
&= \frac{1}{n+1} \qquad \text{d'après la question 1.}
\end{aligned}$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par somme télescopique, on a :

$$\begin{aligned}
S_n - S_1 &= \sum_{k=1}^{n-1} S_{k+1} - S_k\\
&= \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1} \qquad \text{d'après le résultat précédent}\\
&= \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} \qquad \text{par changement d'indice}
\end{aligned}$$

Or $S_1 = \sum_{k=1}^{1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{1}{k} = \frac{(-1)^0}{1}\binom{1}{1} = 1$, d'où :

$$\begin{aligned}
S_n &= 1 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.
\end{aligned}$$

Problème.

I. 1. Comme (E) est une équation polynomiale à coefficients complexes de degré 6, d'après le théorème de d'Alembert-Gauss, (E) admet une solution complexe.

2. Par l'absurde : supposons que (E) admette une solution réelle x. Alors $4x^6 + 3ix^5 + 3ix - 4 = 0$, donc, par identification des parties réelle et imaginaire, $4x^6 - 4 = 3x^5 + 3x = 0$, donc en particulier $x^6 = 1$, donc $x = \pm 1$, ce qui est incompatible avec $3x^5 + 3x = 0$. Donc x n'existe pas.

3. Supposons que $\omega + \frac{1}{\omega} \in \mathbb{R}$. Alors $\omega + \frac{1}{\omega} = \overline{\omega} + \frac{1}{\overline{\omega}}$, donc $\omega - \overline{\omega} = \frac{1}{\overline{\omega}} - \frac{1}{\omega} = \frac{\omega - \overline{\omega}}{|\omega|^2}$.
Comme $\omega \notin \mathbb{R}$, $\omega - \overline{\omega} \neq 0$, donc $|\omega| = 1$. Donc $\omega \in \mathbb{U}$.

4. La fonction f est définie et usuellement dérivable sur $\mathbb{R}^*$, avec : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$. Donc f est croissante sur $]-\infty, -1]$ et sur $[1, +\infty[$, et décroissante sur $[-1, 0[$ et sur $]0, 1]$. Comme $f(-1) = -2$ et $f(1) = 2$, on a donc : $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ |f(x)| \geq 2$.

II. 1. Si $\alpha = 0$, alors $z = 0$. Or 0 n'est pas solution de (E), donc $\alpha \neq 0$.

2. L'équation (E) s'écrit : $-4\alpha^6 - 3\alpha^5 - 3\alpha - 4 = 0$, c'est-à-dire : $4\alpha^3 + 3\alpha^2 + \frac{3}{\alpha^2} + \frac{4}{\alpha^3} = 0$.
Or, d'après la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}
4\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^3 + 3\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2 - 12\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) - 6 &= 4\left(\alpha^3 + 3\alpha + \frac{3}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^3}\right) \\
&\quad +3\left(\alpha^2 + 2 + \frac{1}{\alpha^2}\right) \\
&\quad -12\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) - 6 \\
&= 4\alpha^3 + 3\alpha^2 + \frac{3}{\alpha^2} + \frac{4}{\alpha^3} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

3. La fonction g est polynomiale, donc usuellement dérivable sur $\mathbb{R}$. On a : $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = 12x^2 + 6x - 12$, donc $g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2x^2 + x - 2 \geq 0$. Le trinôme $2x^2 + x - 2$ a pour discriminant $\Delta = 1 + 4 \times 2 \times 2 = 17$, donc pour racines $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}$. Comme son coefficient dominant est strictement positif, le trinôme est positif à l'extérieur de ses racines, d'où le tableau :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$		$-$		$+$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	$g(x_1)$	$\searrow$	$g(x_2)$	$\nearrow$	$+\infty$

4. On a $g(-2) = -50 < 0$, $g(2) = 24 > 0$, et $g(x_1) > 0$, $g(x_2) < 0$. Comme g est continue sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires : g s'annule sur $]-2, x_1[$, sur $]x_1, x_2[$ et sur $]x_2, 2[$. Donc g s'annule en trois points distincts de l'intervalle $]-2, 2[$.

5. On sait que $\alpha + \frac{1}{\alpha}$ est solution de l'équation $4z^3 + 3z^2 - 12z - 6 = 0$. C'est une équation polynomiale à coefficients complexes de degré 3, donc, d'après le théorème de d'Alembert-Gauss, elle admet exactement trois solutions complexes.
D'après la question précédente, cette équation admet trois solutions réelles distinctes dans l'intervalle $]-2, 2[$, donc n'admet pas d'autre solution complexe. Par conséquent, $\alpha + \frac{1}{\alpha} \in]-2, 2[$. D'après la question I.4., on a donc $\alpha \notin \mathbb{R}$. Et donc, d'après la question I.3., $\alpha \in \mathbb{U}$.

6. On a finalement $|z| = |i| \cdot |\alpha| = 1$. Les solutions de l'équation (E) sont donc bien de module 1.