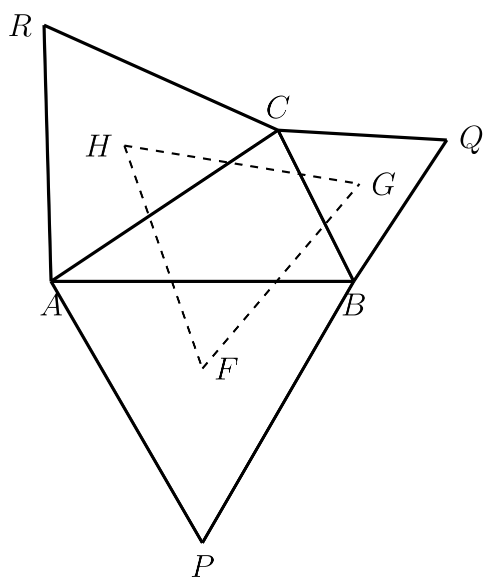
Devoir à la maison n° 3
CORRIGÉ

Exercice 1.

1. (a) D'après le cours : $z' - a = e^{i\frac{\pi}{3}}(z-a)$, donc $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}(z-a) + a$.
   (b) Comme $\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\}$, d'après le cours $1 + j + j^2 = 0$. De plus, $j^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = e^{i\pi}e^{i\frac{\pi}{3}} = -e^{i\frac{\pi}{3}}$.
   (c) Le triangle ABC est équilatéral direct si et seulement si C est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$, c'est-à-dire d'après les questions précédentes :
   $c = e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a) + a = -bj^2 + a(1+j^2) = -aj - bj^2$, c'est-à-dire $aj + bj^2 + c = 0$, c'est-à-dire $a + bj + cj^2 = 0$ (en multipliant par j^2).
2. (a)



   (b) Comme F est le centre de gravité de APB, on a $f = \dfrac{a+p+b}{3}$. De même, $g = \dfrac{b+q+c}{3}$ et $h = \dfrac{c+r+a}{3}$.
   (c) i. Il suffit de montrer que $a + b + c = f + g + h$. Or d'après la question 2b :

$$f + g + h = \frac{2}{3}(a+b+c) + \frac{1}{3}(p+q+r).$$

De plus, d'après la question 1c :

$$p + bj + aj^2 = 0,$$

et de même :

$$q + cj + bj^2 = r + aj + cj^2 = 0,$$

donc :

$$p + q + r = (a + b + c)(-j - j^2) = a + b + c.$$

Donc $f + g + h = a + b + c$.

ii. D'après la question 2b :

$$f + gj + hj^2 = \frac{1}{3}\left((a + bj + cj^2) + (aj^2 + b + cj) + (p + qj + rj^2)\right).$$

Or d'après la question 1c :

$$p+qj+rj^2 = -(bj+aj^2)-(cj^2+b)-(a+cj) = -(a+bj+cj^2)-(aj^2+b+cj).$$

Donc $f + gj + hj^2 = 0$, donc le triangle FGH est équilatéral direct.
Ce résultat est connu sous le nom de théorème de Napoléon.

Exercice 2. On considère la fonction $f : x \mapsto \arcsin\left(2x\sqrt{1 - x^2}\right)$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. $f(x)$ est défini lorsque :
   — $1 - x^2 \geq 0$, c'est-à-dire $x \in [-1, 1]$,
   — $2x\sqrt{1 - x^2} \in [-1, 1]$, or :
   $-1 \leq 2x\sqrt{1 - x^2} \leq 1 \Leftrightarrow 4x^2(1 - x^2) \leq 1 \Leftrightarrow 4x^4 - 4x^2 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (2x^2 - 1)^2 \geq 0.$
   La dernière inégalité est toujours vraie, donc, par équivalence, la première également.

   On a donc $D_f = [-1, 1]$. Sur son ensemble de définition, f est continue car composée de fonctions continues.
2. La fonction f est dérivable lorsque :
   — $1 - x^2 \geq 0$, c'est-à-dire $x \in]-1, 1[$,
   — $2x\sqrt{1 - x^2} \in]-1, 1[$, soit, d'après l'équivalence ci-dessus, $2x^2 - 1 \neq 0$, soit $x \neq \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

   Donc $D_{f'} = \left]-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right[\cup \left]-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right[\cup \left]\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right[$.
3. Soit $x \in D_{f'}$. On a :
   $f'(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{1 - u(x)^2}}$ où $u(x) = 2x\sqrt{1 - x^2}$, donc $u'(x) = 2\sqrt{1 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$, donc :
   $f'(x) = \frac{2 - 4x^2}{\sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - 4x^2(1 - x^2)}} = -\frac{2}{\sqrt{1 - x^2}}\frac{2x^2 - 1}{|2x^2 - 1|}.$
   Donc $f'(x)$ est du signe opposé à celui de $2x^2 - 1$:

x	-1		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		1
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	$\|\|$	$+$	$\|\|$	$-$	$\|\|$
f	0	$\searrow$	$-\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	0

4. Pour tout $x \in \left]-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right[$, on a d'après la question 3 : $f'(x) = -\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} = -2\arcsin'(x)$, donc, comme f est continue en -1 et en $-\frac{1}{\sqrt{2}}$: pour tout $x \in I_1 = \left[-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, il existe $c_1 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = -2\arcsin(x) + c_1$. En évaluant en $x = -1$, on trouve $0 = \pi + c_1$, donc $c_1 = -\pi$.
   Comme f est impaire, on a ensuite par symétrie : pour tout $x \in I_2 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$, $f(x) = -2\arcsin(x) + \pi$.
   Enfin, pour tout $x \in I_3 = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, on a de même $f(x) = 2\arcsin(x) + c_3$, où, en évaluant en 0, $c_3 = 0$.
5. D'après la question précédente, à gauche et à droite en $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, f est une transformation affine de $\arcsin$, donc est dérivable à gauche et à droite en ces points, avec :
   $f'_g\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -2\arcsin'\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -2\sqrt{2}$ et $f'_d\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\arcsin'\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2}$,
   puis de même, $f'_g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2}$ et $f'_d\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -2\sqrt{2}$.
6.