Feuille d'exercices 6
ENSEMBLES ET APPLICATIONS

1 - ENSEMBLES

Exercice 1. Identifier les ensembles suivants :

(a) $\{x \in \mathbb{R} \mid \exists \varepsilon > 0,\ x < \varepsilon\}$,

(b) $\{x \in \mathbb{R} \mid \forall \varepsilon > 0,\ |x| < \varepsilon\}$.

Exercice 2. Montrer les égalités suivantes :

(a) $]-1,1[= \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left[-1+\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right]$,

(b) $[-1,1] = \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left]-1-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right[$.

Exercice 3. Soient E un ensemble et A, B, C trois sous-ensembles de E. Montrer que :

(a) $A \subset B \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$,

(b) $(A \cup B = A \cap C) \Leftrightarrow (B \subset A \subset C)$,

(c) $(A \cup B = A \cap B) \Leftrightarrow (A = B)$,

(d) $(A\cup B = A\cup C,\ A\cap B = A\cap C) \Leftrightarrow (B = C)$,

(e) $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cap C)$,

(f) $(A\setminus B)\setminus(A\setminus C) = (A\setminus B)\cap C = (A\cap C)\setminus B$.

Exercice 4. Soient E et F deux ensembles.

1. Montrer que $E \subset F \Leftrightarrow \mathcal{P}(E) \subset \mathcal{P}(F)$.
2. Montrer que $\mathcal{P}(E \cap F) = \mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$.
3. A-t-on $\mathcal{P}(E \cup F) = \mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$?

Exercice 5. Soient E un ensemble et A, B deux sous-ensembles de E. Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$:

(a) $X \cup A = B$,

(b) $X \cap A = B$.

Exercice 6. Soient E un ensemble et A, B, C trois sous-ensembles de E. On note $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ la *différence symétrique* entre A et B. Montrer que :

(a) $A\Delta B = B\Delta A$,

(b) $A\Delta\emptyset = A$,

(c) $A\Delta A = \emptyset$,

(d) $A\Delta B = \overline{A}\Delta\overline{B}$,

(e) $A \cap (B\Delta C) = (A \cap B)\Delta(A \cap C)$,

(f) $(A\Delta B = A\Delta C) \Leftrightarrow (B = C)$.

2 - APPLICATIONS

Exercice 7. Soient $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définies par : $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = 2n$, $g(2n) = n$ et $g(2n+1) = 0$.

(a) f et g sont-elles injectives ? surjectives ?

(b) Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice 8. Montrer que l'application $f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{N}^2 & \to & \mathbb{N}^* \\ (m,n) & \mapsto & 2^m(2n+1) \end{array} \right.$ est bijective.

Exercice 9. Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array} \right. , \qquad h : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x-y) \end{array} \right. ,$$

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array} \right. , \qquad i : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x, xy-y^3) \end{array} \right. .$$

Exercice 10. Soit (a,b,c,d) dans $\mathbb{C}^4$ tel que $ad \neq bc$.
Montrer que l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\} & \to & \mathbb{C} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\} \\ z & \mapsto & \frac{az+b}{cz+d} \end{array} \right.$ est bijective. Déterminer sa réciproque.

Exercice 11. Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. Montrer que f est injective si et seulement si : $\forall A, B \in \mathcal{P}(E),\ f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Exercice 12. Soient E et F deux ensembles. Montrer qu'il existe une application injective de E dans F si et seulement s'il existe une application surjective de F dans E.

Exercice 13. Soient $f : E \to F$ et $g : E \to G$ deux applications, puis $h : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & F \times G \\ x & \mapsto & (f(x), g(x)) \end{array} \right.$.

(a) Montrer que si f ou g est injective, alors h est injective.

(b) On suppose f et g surjectives. h est-elle surjective ?

Exercice 14. Soit E un ensemble. Montrer qu'il n'existe pas d'application surjective f de E dans $\mathcal{P}(E)$. On pourra pour cela considérer $A = \{x \in E \mid x \notin f(x)\}$.

3 - Dénombrement

Exercice 15. Soient E et F deux ensembles finis de cardinaux respectifs n et p. Combien y a-t-il d'injections de E dans F ?

Exercice 16. Soient $E = [\![1, n]\!]$ et $F = [\![1, p]\!]$ avec $n \leq p$. Combien y a-t-il d'applications strictement croissantes de E vers F ?

Exercice 17. Combien le mot "abracadabrantesque" a-t-il d'anagrammes ?

Exercice 18. Combien de nombres à 5 chiffres ne contiennent pas le chiffre 9 ?

Exercice 19. Montrer que dans un village de 700 habitants, au moins 2 personnes ont les mêmes initiales.

Exercice 20. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note u_n le nombre de listes d'entiers naturels non nuls dont la somme des termes fait n.

(a) Déterminer u_1, u_2, u_3, u_4. Que peut-on conjecturer pour u_n ?

(b) Démontrer cette conjecture.