
Corrigé DL 2 : Centrale 1 2015 (Trois premières parties)

Dans ce problème, \mathbb{K} désigne le corps \mathbb{R} ou le corps \mathbb{C} et E est un \mathbb{K} -espace vectoriel non nul. ω désignera l'endomorphisme nul de E .

Si f est un endomorphisme de E , pour tout sous-espace F de E stable par f on note f_F l'endomorphisme de F induit par f , c'est-à-dire défini sur F par $f_F(x) = f(x)$ pour tout x dans F .

Pour tout endomorphisme f d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E on définit la suite $(f^n)_{n \in \mathbb{N}}$ des puissances de f par

$$\begin{cases} f^0 = \omega, \\ f^{k+1} = f \circ f^k = f^k \circ f \quad \text{pour tout } k \text{ dans } \mathbb{N}. \end{cases}$$

On note $\mathbb{K}[X]$ l'espace vectoriel sur \mathbb{K} des polynômes à coefficients dans \mathbb{K} et, pour tout n de \mathbb{N} , $\mathbb{K}_n[X]$ le sous-espace de $\mathbb{K}[X]$ des polynômes de degré au plus égal à n .

Pour $n \geq 1$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est l'espace des matrices carrées à n lignes et à éléments dans \mathbb{K} et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est l'espace des matrices colonnes à n lignes et à éléments dans \mathbb{K} .

I Première partie

Dans cette partie, f est un endomorphisme d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E .

I.A – Montrer qu'une droite F engendrée par un vecteur u est stable par f si et seulement si u est un vecteur propre de f .

Solution : Dans votre cours avec tous les détails nécessaires ■

I.B –

I.B.1) Montrer qu'il existe au moins deux sous-espaces de E stables par f et donner un exemple d'un endomorphisme de \mathbb{R}^2 qui n'admet que deux sous-espaces stables.

Solution : E et $\{0_E\}$ sont stables par f et distincts par hypothèse énoncée. Pour la seconde partie de cette question, il suffit d'exhiber un endomorphisme de \mathbb{R}^2 n'ayant pas de droite vectorielle stable donc pas de valeur propre réelle. Ainsi l'endomorphisme de \mathbb{R}^2 canoniquement associé à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ convient-il puisque son polynôme caractéristique est $X^2 + 1$ ■

I.B.2) Montrer que si E est de dimension finie $n \geq 2$ et si f est non nul et non injectif, alors il existe au moins trois sous-espaces de E stables par f et au moins quatre lorsque n est impair.

Donner un exemple d'endomorphisme de \mathbb{R}^2 qui n'admet que trois sous-espaces stables.

Solution : Les trois sous-espaces de E suivants sont stables par f : $E, \{0_E\}$ et $\text{Ker}(f)$. De plus ils sont distincts deux à deux puisque $\text{Ker}(f) \neq \{0_E\}$ (f non injective) et $\text{Ker}(f) \neq E$ (puisque $f \neq \omega$).

Si maintenant n est impair, la formule du rang implique que $\text{Im}(f)$, stable par f , est différent de $\text{Ker}(f)$ et parce que f est non injective (= surjective ici) et non nul, cette image est différente aussi de E et $\{0_E\}$. Dans ce contexte $E, \{0_E\}, \text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont bien quatre sev de E stables par f .

Il suffit au vu de ce qui précède de considérer un endomorphisme non injectif et non nul dont l'image coïncide avec le noyau (et dont la seule vp soit 0 ce qui est redondant avec l'information précédente). Ainsi l'endomorphisme de \mathbb{R}^2 canoniquement associé à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ convient-il puisque $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f) = \text{Vect}(0, 1)$ et que $\text{Sp}(f) = \{0\}$ ■

I.C –

I.C.1) Montrer que tout sous-espace engendré par une famille de vecteurs propres de f est stable par f . Préciser l'endomorphisme induit par f sur tout sous-espace propre de f .

Solution : Posons $F = Vect(x_1, \dots, x_m)$, où chaque x_i est vecteur propre de F . Comme, pour tout i , $f(x_i) \in F$, F est bien stable par f .

Le cours nous assure que l'endomorphisme induit par f sur l'espace propre de f (associé à la vp λ) est l'homothétie (de cet espace propre) de rapport λ ■

I.C.2) Montrer que si f admet un sous-espace propre de dimension au moins égale à 2 alors il existe une infinité de droites de E stables par f .

Solution : Toute droite incluse dans ce sous-espace vectoriel stable (qui est au moins un plan) est stable par f (car engendrée par un vecteur propre de f). Comme il existe une infinité de droites incluses dans un plan, cette assertion est prouvée ■

I.C.3) Que dire de f si tous les sous-espaces de E sont stables par f ?

Solution : Si f admet deux vp distinctes associées aux vecteurs propres x et y alors $x + y$ n'est pas vecteur propre de f donc f admet au plus une valeur propre. Par ailleurs en considérant (e_1, \dots, e_n) une base de E puisque chaque $Vect(e_i)$ est stable par f , ce dernier est diagonalisable. En conclusion f est dz et son spectre est réduit à un élément, f est donc une homothétie ■

I.D – Dans cette sous-partie, E est un espace de dimension finie.

I.D.1) Montrer que si f est diagonalisable alors tout sous-espace de E admet un supplémentaire dans E stable par f . On pourra partir d'une base de F et d'une base de E constituée de vecteurs propres de f .

Solution : Notons $b = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E , constituée de vecteurs propres de f et considérons F un sev de E stable par f .

Le théorème de la base incomplète dans sa version forte (programme première année), on peut compléter une base de F (donc une famille libre) en une base de E en y ajoutant des vecteurs de b qui forment une famille b' . Dès lors $Vect(b')$ est un supplémentaire de F (dans E), stable par f d'après I.C.1)■

I.D.2) Montrer que si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et si tout sous-espace de E stable par f admet un supplémentaire dans E stable par f , alors f est diagonalisable. Qu'en est-il si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$?

Solution : Notons F la somme (directe) des sous-espaces propres de f . Supposons que $F \neq E$ en procédant par l'absurde (on notera donc que tous les vecteurs propres de f sont dans $F - 0_E$). On peut alors trouver G un supplémentaire de F (dans E) qui soit stable par f et, en notant g l'endomorphisme de G induit par f , considérer un vecteur propre de g (tout endomorphisme d'un \mathbb{C} ev de dimension finie, **non nulle** admet vp et vecteur propre) qui est aussi un vecteur propre de f et qui devrait être à la fois dans F et G tout en étant non nul; c'est absurde et $F = E$ donc f est bien dz.

En prenant f , l'endomorphisme de \mathbb{R}^2 utilisé comme contre exemple en I.A, on voit que c'est alors faux si le corps des scalaires est \mathbb{R} puisque ici les seuls sev stables sont E et $\{0_E\}$, qu'ils sont supplémentaires et que f n'est pas diagonalisable puisque son spectre est vide ■

II Deuxième partie

Dans cette partie, n et p sont deux entiers naturels au moins égaux à 2, f est un endomorphisme diagonalisable d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension n , qui admet p valeurs propres distinctes $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ et, pour tout i dans $\llbracket 1, p \rrbracket$, on note E_i le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ_i .

II.A – Il s'agit ici de montrer qu'un sous-espace F de E est stable par f si et seulement si $F = \bigoplus_{i=1}^p (F \cap E_i)$.

II.A.1) Montrer que tout sous-espace F de E tel que $F = \bigoplus_{i=1}^p (F \cap E_i)$ est stable par f .

Solution : F étant par l'égalité $F = \bigoplus_{i=1}^p (F \cap E_i)$ engendré par des vecteurs propres de f est bien stable par f par I.C.1)■

II.A.2) Soit F un sous-espace de E stable par f et x un vecteur non nul de F . Justifier l'existence et

l'unicité de $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ dans $E_1 \times \cdots \times E_p$ tel que $x = \sum_{i=1}^p x_i$.

Solution : f est dz donc E est la somme directe des E_i ($1 \leq i \leq p$), d'où existence et unicité de l'objet demandé ■

II.A.3) Si on pose $H_x = \{i \in \llbracket 1, p \rrbracket \mid x_i \neq 0\}$, H_x est non vide et, quitte à renuméroter les valeurs propres (et les sous-espaces propres), on peut supposer que $H_x = \llbracket 1, r \rrbracket$ avec $1 \leq r \leq p$. Ainsi on a

$x = \sum_{i=1}^r x_i$ avec $x_i \in E_i \setminus \{0\}$ pour tout i de $\llbracket 1, r \rrbracket$.

On pose $V_x = (x_1, \dots, x_r)$.

Montrer que $\mathcal{B}_x = (x_1, \dots, x_r)$ est une base de V_x .

Solution : Par sa définition \mathcal{B} engendre V_x ; les vecteurs de cette famille étant des vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes, elle est aussi libre donc base de V_x ■

II.A.4) Montrer que pour tout j de $\llbracket 1, r \rrbracket$, $f^{j-1}(x)$ appartient à V_x et donner la matrice de la famille $(f^{j-1}(x))_{1 \leq j \leq r}$ dans la base \mathcal{B}_x .

Solution : Puisque chaque x_i est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ_i , il vient par linéarité et simple itération : $f^{j-1}(x) = \sum_{i=1}^r \lambda_i^{j-1} x_i$. Donc la matrice cherchée (elle sera notée

M) est $(\lambda_j^{i-1})_{1 \leq i, j \leq r}$.

Par ailleurs la stabilité de F par f et le fait que $x \in F$ impliquent bien que chaque $f^k(x) \in F$, ce pour tout $k \in \mathbb{N}$, donc la famille \mathcal{B}_x est une bien une famille de F ■

II.A.5) Montrer que $(f^{j-1}(x))_{1 \leq j \leq r}$ est une base de V_x .

Solution : Le déterminant de M (cf question précédente) étant un déterminant de Vandermonde non nul (les λ_i étant deux à deux différentes), $(f^{j-1}(x))_{1 \leq j \leq r}$ est une base de V_x ■

II.A.6) En déduire que pour tout i de $\llbracket 1, r \rrbracket$, x_i appartient à F et conclure.

Solution : On pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} x \\ \vdots \\ f^{r-1}(x) \end{pmatrix}$. La question II.A.4) peut se traduire en

l'égalité matricielle : $MX = Y$ ou de façon équivalente $X = M^{-1}Y$; ce qui prouve que chaque x_i est CL de $x, \dots, f^{r-1}(x)$ donc est bien élément de F . La conclusion en découle par double inclusion ■

II.B – Dans cette sous-partie, on se place dans le cas où $p = n$.

II.B.1) Préciser la dimension de E_i pour tout i dans $\llbracket 1, p \rrbracket$.

Solution : Etant donné que f possède $n = \dim E$ vp, chaque espace propre est une droite vectorielle ■

II.B.2) Combien y a-t-il de droites de E stables par f ?

Solution : Par I.A.1) et la question qui précède, nous obtenons n droites vectorielles stables par f ■

II.B.3) Si $n \geq 3$ et $k \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$, combien y a-t-il de sous-espaces de E de dimension k et stables par f ?

Solution : Par la partie II, tout espace stable par f est engendré par des vecteurs propres de f et vice-versa. Or il y a $\binom{n}{k}$ parties parmi l'ensemble des vecteurs propres x_1, \dots, x_n donc nous disposons bien de $\binom{n}{k}$ de sous-espaces de F et de dimension k , stables par f ■

II.B.4) Combien y a-t-il de sous-espaces de E stables par f dans ce cas? Les donner tous.

Solution : La formule précédente est valable pour $k = 0, 1, n$, il y en a donc 2^n (somme des $\binom{n}{k}$, si $0 \leq k \leq n$). Ce sont outre 0_E les sev engendrés par les vecteurs propres de f ■

III Troisième partie

III.A – On considère l'endomorphisme D de dérivation sur $\mathbb{K}[X]$ défini par $D(P) = P'$ pour tout P dans $\mathbb{K}[X]$.

III.A.1) Vérifier que pour tout n de \mathbb{N} , $\mathbb{K}_n[X]$ est stable par D et donner la matrice A_n de l'endomorphisme induit par D sur $\mathbb{K}_n[X]$ dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.

III.A.2) Soit F un sous-espace de $\mathbb{K}[X]$, de dimension finie non nulle, stable par D .

a) Justifier l'existence d'un entier naturel n et d'un polynôme R de degré n tels que $R \in F$ et $F \subset \mathbb{K}_n[X]$.

b) Montrer que la famille $(D^i(R))_{0 \leq i \leq n}$ est une famille libre de F .

c) En déduire que $F = \mathbb{K}_n[X]$.

III.A.3) Donner tous les sous-espaces de $\mathbb{K}[X]$ stables par D .

Solution de cette sous-partie : C'est en fait l'exercice 3 du TD6 corrigé (le 22/9) sur document ■

Notez néanmoins que les sous-espaces de $\mathbb{K}[X]$ sont les $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathbb{K}[X]$ et $\{0\}$. ■

On considère un endomorphisme f d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension $n \geq 2$ tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.

III.B.1) Déterminer l'ensemble des vecteurs u de E tels que la famille $\mathcal{B}_{f,u} = (f^{n-i}(u))_{1 \leq i \leq n}$ soit une base de E .

Solution : Exercice déjà fait et sur lequel j'ai insisté. Il faut (puisque une famille contenant le vecteur nul est liée) et il suffit que $u \neq 0_E$ pour que cette famille soit une famille libre (donc base pour des raisons de cardinal) (Voir TD6 exo 4) ■

III.B.2) Dans le cas où $\mathcal{B}_{f,u}$ est une base de E , quelle est la matrice de f dans $\mathcal{B}_{f,u}$?

Solution : Il s'agit de la matrice carrée d'ordre n avec partout des zéros sauf en sur diagonale où ne figurent que des 1 ■

III.B.3) Déterminer une base de E telle que la matrice de f dans cette base soit A_{n-1} .

Solution : On remplace $\mathcal{B}_{f,u}$ par $(x_i = \frac{f^{n-i}(u)}{i!})_{1 \leq i \leq n}$ ■

III.B.4) Donner tous les sous-espaces de E stables par f . Combien y en a-t-il ? Donner une relation simple entre ces sous-espaces stables et les noyaux $\ker(f^i)$ pour i dans $\llbracket 0, n \rrbracket$.

Solution : En utilisant le début de cette partie consacré à l'opérateur D , il vient que (en assimilant f à D restreint à $\mathbb{K}_{n-1}[X]$) tous les sous-espaces de E stables par f sont les $\text{Vect}(x_1, \dots, x_i)$ pour $0 \leq i \leq n$ qui correspondent à $\{0\}$ et aux $\mathbb{K}_m[X]$ ($0 \leq m \leq n-1$).

Nous en disposons de $n+1$.

Par ailleurs $\mathbb{K}_m[X] = \text{Ker}(D^{m+1})$ donc via leur matrice commune $\text{Vect}(x_1, \dots, x_i) = \text{Ker}(f^i)$ pour $0 \leq i \leq n$ ■