

---

Corrigé DL 2 : Centrale 1 2015 (Trois premières parties)

---

Dans ce problème,  $\mathbb{K}$  désigne le corps  $\mathbb{R}$  ou le corps  $\mathbb{C}$  et  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel non nul.  $\omega$  désignera l'endomorphisme nul de  $E$ .

Si  $f$  est un endomorphisme de  $E$ , pour tout sous-espace  $F$  de  $E$  stable par  $f$  on note  $f_F$  l'endomorphisme de  $F$  induit par  $f$ , c'est-à-dire défini sur  $F$  par  $f_F(x) = f(x)$  pour tout  $x$  dans  $F$ .

Pour tout endomorphisme  $f$  d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  on définit la suite  $(f^n)_{n \in \mathbb{N}}$  des puissances de  $f$  par

$$\begin{cases} f^0 = \omega, \\ f^{k+1} = f \circ f^k = f^k \circ f \quad \text{pour tout } k \text{ dans } \mathbb{N}. \end{cases}$$

On note  $\mathbb{K}[X]$  l'espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{K}$  et, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{K}_n[X]$  le sous-espace de  $\mathbb{K}[X]$  des polynômes de degré au plus égal à  $n$ .

Pour  $n \geq 1$ ,  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est l'espace des matrices carrées à  $n$  lignes et à éléments dans  $\mathbb{K}$  et  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  est l'espace des matrices colonnes à  $n$  lignes et à éléments dans  $\mathbb{K}$ .

### I Première partie

Dans cette partie,  $f$  est un endomorphisme d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ .

I.A – Montrer qu'une droite  $F$  engendrée par un vecteur  $u$  est stable par  $f$  si et seulement si  $u$  est un vecteur propre de  $f$ .

**Solution :** Dans votre cours avec tous les détails nécessaires ■

I.B –

I.B.1) Montrer qu'il existe au moins deux sous-espaces de  $E$  stables par  $f$  et donner un exemple d'un endomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  qui n'admet que deux sous-espaces stables.

**Solution :**  $E$  et  $\{0_E\}$  sont stables par  $f$  et distincts par hypothèse énoncée. Pour la seconde partie de cette question, il suffit d'exhiber un endomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  n'ayant pas de droite vectorielle stable donc pas de valeur propre réelle. Ainsi l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  canoniquement associé à la matrice  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  convient-il puisque son polynôme caractéristique est  $X^2 + 1$  ■

I.B.2) Montrer que si  $E$  est de dimension finie  $n \geq 2$  et si  $f$  est non nul et non injectif, alors il existe au moins trois sous-espaces de  $E$  stables par  $f$  et au moins quatre lorsque  $n$  est impair.

Donner un exemple d'endomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  qui n'admet que trois sous-espaces stables.

**Solution :** Les trois sous-espaces de  $E$  suivants sont stables par  $f$  :  $E, \{0_E\}$  et  $\text{Ker}(f)$ . De plus ils sont distincts deux à deux puisque  $\text{Ker}(f) \neq \{0_E\}$  ( $f$  non injective) et  $\text{Ker}(f) \neq E$  (puisque  $f \neq \omega$ ).

Si maintenant  $n$  est impair, la formule du rang implique que  $\text{Im}(f)$ , stable par  $f$ , est différent de  $\text{Ker}(f)$  et parce que  $f$  est non injective (= surjective ici) et non nul, cette image est différente aussi de  $E$  et  $\{0_E\}$ . Dans ce contexte  $E, \{0_E\}, \text{Ker}(f)$  et  $\text{Im}(f)$  sont bien quatre sev de  $E$  stables par  $f$ .

Il suffit au vu de ce qui précède de considérer un endomorphisme non injectif et non nul dont l'image coïncide avec le noyau (et dont la seule vp soit 0 ce qui est redondant avec l'information précédente). Ainsi l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  canoniquement associé à la matrice  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  convient-il puisque  $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f) = \text{Vect}(0, 1)$  et que  $\text{Sp}(f) = \{0\}$  ■

I.C –

I.C.1) Montrer que tout sous-espace engendré par une famille de vecteurs propres de  $f$  est stable par  $f$ . Préciser l'endomorphisme induit par  $f$  sur tout sous-espace propre de  $f$ .

**Solution :** Posons  $F = Vect(x_1, \dots, x_m)$ , où chaque  $x_i$  est vecteur propre de  $F$ . Comme, pour tout  $i$ ,  $f(x_i) \in F$ ,  $F$  est bien stable par  $f$ .

Le cours nous assure que l'endomorphisme induit par  $f$  sur l'espace propre de  $f$  ( associé à la vp  $\lambda$ ) est l'homothétie ( de cet espace propre) de rapport  $\lambda$  ■

I.C.2) Montrer que si  $f$  admet un sous-espace propre de dimension au moins égale à 2 alors il existe une infinité de droites de  $E$  stables par  $f$ .

**Solution :** Toute droite incluse dans ce sous-espace vectoriel stable ( qui est au moins un plan) est stable par  $f$  ( car engendrée par un vecteur propre de  $f$ ). Comme il existe une infinité de droites incluses dans un plan, cette assertion est prouvée ■

I.C.3) Que dire de  $f$  si tous les sous-espaces de  $E$  sont stables par  $f$  ?

**Solution :** Si  $f$  admet deux vp distinctes associées aux vecteurs propres  $x$  et  $y$  alors  $x + y$  n'est pas vecteur propre de  $f$  donc  $f$  admet au plus une valeur propre. Par ailleurs en considérant  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$  puisque chaque  $Vect(e_i)$  est stable par  $f$ , ce dernier est diagonalisable. En conclusion  $f$  est dz et son spectre est réduit à un élément,  $f$  est donc une homothétie ■

I.D – Dans cette sous-partie,  $E$  est un espace de dimension finie.

I.D.1) Montrer que si  $f$  est diagonalisable alors tout sous-espace de  $E$  admet un supplémentaire dans  $E$  stable par  $f$ . On pourra partir d'une base de  $F$  et d'une base de  $E$  constituée de vecteurs propres de  $f$ .

**Solution :** Notons  $b = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ , constituée de vecteurs propres de  $f$  et considérons  $F$  un sev de  $E$  stable par  $f$ .

Le théorème de la base incomplète dans sa version forte ( programme première année), on peut compléter une base de  $F$  ( donc une famille libre) en une base de  $E$  en y ajoutant des vecteurs de  $b$  qui forment une famille  $b'$ . Dès lors  $Vect(b')$  est un supplémentaire de  $F$  (dans  $E$ ), stable par  $f$  d'après I.C.1)■

I.D.2) Montrer que si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  et si tout sous-espace de  $E$  stable par  $f$  admet un supplémentaire dans  $E$  stable par  $f$ , alors  $f$  est diagonalisable. Qu'en est-il si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ?

**Solution :** Notons  $F$  la somme ( directe) des sous-espaces propres de  $f$ . Supposons que  $F \neq E$  en procédant par l'absurde ( on notera donc que tous les vecteurs propres de  $f$  sont dans  $F - 0_E$ ). On peut alors trouver  $G$  un supplémentaire de  $F$  (dans  $E$ ) qui soit stable par  $f$  et, en notant  $g$  l'endomorphisme de  $G$  induit par  $f$ , considérer un vecteur propre de  $g$  ( tout endomorphisme d'un  $\mathbb{C}$  ev de dimension finie, **non nulle** admet vp et vecteur propre) qui est aussi un vecteur propre de  $f$  et qui devrait être à la fois dans  $F$  et  $G$  tout en étant non nul; c'est absurde et  $F = E$  donc  $f$  est bien dz.

En prenant  $f$ , l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  utilisé comme contre exemple en I.A, on voit que c'est alors faux si le corps des scalaires est  $\mathbb{R}$  puisque ici les seuls sev stables sont  $E$  et  $\{0_E\}$ , qu'ils sont supplémentaires et que  $f$  n'est pas diagonalisable puisque son spectre est vide ■

## II Deuxième partie

Dans cette partie,  $n$  et  $p$  sont deux entiers naturels au moins égaux à 2,  $f$  est un endomorphisme diagonalisable d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension  $n$ , qui admet  $p$  valeurs propres distinctes  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$  et, pour tout  $i$  dans  $\llbracket 1, p \rrbracket$ , on note  $E_i$  le sous-espace propre de  $f$  associé à la valeur propre  $\lambda_i$ .

II.A – Il s'agit ici de montrer qu'un sous-espace  $F$  de  $E$  est stable par  $f$  si et seulement si  $F = \bigoplus_{i=1}^p (F \cap E_i)$ .

II.A.1) Montrer que tout sous-espace  $F$  de  $E$  tel que  $F = \bigoplus_{i=1}^p (F \cap E_i)$  est stable par  $f$ .

**Solution :**  $F$  étant par l'égalité  $F = \bigoplus_{i=1}^p (F \cap E_i)$  engendré par des vecteurs propres de  $f$  est bien stable par  $f$  par I.C.1)■

II.A.2) Soit  $F$  un sous-espace de  $E$  stable par  $f$  et  $x$  un vecteur non nul de  $F$ . Justifier l'existence et

l'unicité de  $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$  dans  $E_1 \times \cdots \times E_p$  tel que  $x = \sum_{i=1}^p x_i$ .

**Solution :**  $f$  est dz donc  $E$  est la somme directe des  $E_i$  ( $1 \leq i \leq p$ ), d'où existence et unicité de l'objet demandé ■

II.A.3) Si on pose  $H_x = \{i \in \llbracket 1, p \rrbracket \mid x_i \neq 0\}$ ,  $H_x$  est non vide et, quitte à renuméroter les valeurs propres (et les sous-espaces propres), on peut supposer que  $H_x = \llbracket 1, r \rrbracket$  avec  $1 \leq r \leq p$ . Ainsi on a

$x = \sum_{i=1}^r x_i$  avec  $x_i \in E_i \setminus \{0\}$  pour tout  $i$  de  $\llbracket 1, r \rrbracket$ .

On pose  $V_x = (x_1, \dots, x_r)$ .

Montrer que  $\mathcal{B}_x = (x_1, \dots, x_r)$  est une base de  $V_x$ .

**Solution :** Par sa définition  $\mathcal{B}$  engendre  $V_x$ ; les vecteurs de cette famille étant des vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes, elle est aussi libre donc base de  $V_x$  ■

II.A.4) Montrer que pour tout  $j$  de  $\llbracket 1, r \rrbracket$ ,  $f^{j-1}(x)$  appartient à  $V_x$  et donner la matrice de la famille  $(f^{j-1}(x))_{1 \leq j \leq r}$  dans la base  $\mathcal{B}_x$ .

**Solution :** Puisque chaque  $x_i$  est un vecteur propre de  $f$  associé à la valeur propre  $\lambda_i$ , il vient par linéarité et simple itération :  $f^{j-1}(x) = \sum_{i=1}^r \lambda_i^{j-1} x_i$ . Donc la matrice cherchée ( elle sera notée

$M$  ) est  $(\lambda_j^{i-1})_{1 \leq i, j \leq r}$ .

Par ailleurs la stabilité de  $F$  par  $f$  et le fait que  $x \in F$  impliquent bien que chaque  $f^k(x) \in F$ , ce pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , donc la famille  $\mathcal{B}_x$  est une bien une famille de  $F$  ■

II.A.5) Montrer que  $(f^{j-1}(x))_{1 \leq j \leq r}$  est une base de  $V_x$ .

**Solution :** Le déterminant de  $M$  ( cf question précédente) étant un déterminant de Vandermonde non nul ( les  $\lambda_i$  étant deux à deux différentes),  $(f^{j-1}(x))_{1 \leq j \leq r}$  est une base de  $V_x$  ■

II.A.6) En déduire que pour tout  $i$  de  $\llbracket 1, r \rrbracket$ ,  $x_i$  appartient à  $F$  et conclure.

**Solution :** On pose  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}$  et  $Y = \begin{pmatrix} x \\ \vdots \\ f^{r-1}(x) \end{pmatrix}$ . La question II.A.4) peut se traduire en

l'égalité matricielle :  $MX = Y$  ou de façon équivalente  $X = M^{-1}Y$ ; ce qui prouve que chaque  $x_i$  est CL de  $x, \dots, f^{r-1}(x)$  donc est bien élément de  $F$ . La conclusion en découle par double inclusion ■

II.B – Dans cette sous-partie, on se place dans le cas où  $p = n$ .

II.B.1) Préciser la dimension de  $E_i$  pour tout  $i$  dans  $\llbracket 1, p \rrbracket$ .

**Solution :** Etant donné que  $f$  possède  $n = \dim E$  vp, chaque espace propre est une droite vectorielle ■

II.B.2) Combien y a-t-il de droites de  $E$  stables par  $f$ ?

**Solution :** Par I.A.1) et la question qui précède, nous obtenons  $n$  droites vectorielles stables par  $f$  ■

II.B.3) Si  $n \geq 3$  et  $k \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$ , combien y a-t-il de sous-espaces de  $E$  de dimension  $k$  et stables par  $f$  ?

**Solution :** Par la partie II, tout espace stable par  $f$  est engendré par des vecteurs propres de  $f$  et vice-versa. Or il y a  $\binom{n}{k}$  parties parmi l'ensemble des vecteurs propres  $x_1, \dots, x_n$  donc nous disposons bien de  $\binom{n}{k}$  de sous-espaces de  $F$  et de dimension  $k$ , stables par  $f$  ■

II.B.4) Combien y a-t-il de sous-espaces de  $E$  stables par  $f$  dans ce cas? Les donner tous.

**Solution :** La formule précédente est valable pour  $k = 0, 1, n$ , il y en a donc  $2^n$  ( somme des  $\binom{n}{k}$ , si  $0 \leq k \leq n$ ). Ce sont outre  $0_E$  les sev engendrés par les vecteurs propres de  $f$  ■

### III Troisième partie

III.A – On considère l'endomorphisme  $D$  de dérivation sur  $\mathbb{K}[X]$  défini par  $D(P) = P'$  pour tout  $P$  dans  $\mathbb{K}[X]$ .

III.A.1) Vérifier que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{K}_n[X]$  est stable par  $D$  et donner la matrice  $A_n$  de l'endomorphisme induit par  $D$  sur  $\mathbb{K}_n[X]$  dans la base canonique de  $\mathbb{K}_n[X]$ .

III.A.2) Soit  $F$  un sous-espace de  $\mathbb{K}[X]$ , de dimension finie non nulle, stable par  $D$ .

a) Justifier l'existence d'un entier naturel  $n$  et d'un polynôme  $R$  de degré  $n$  tels que  $R \in F$  et  $F \subset \mathbb{K}_n[X]$ .

b) Montrer que la famille  $(D^i(R))_{0 \leq i \leq n}$  est une famille libre de  $F$ .

c) En déduire que  $F = \mathbb{K}_n[X]$ .

III.A.3) Donner tous les sous-espaces de  $\mathbb{K}[X]$  stables par  $D$ .

**Solution de cette sous-partie :** C'est en fait l'exercice 3 du TD6 corrigé ( le 22/9) sur document ■

Notez néanmoins que les sous-espaces de  $\mathbb{K}[X]$  sont les  $\mathbb{K}_n[X]$ ,  $\mathbb{K}[X]$  et  $\{0\}$ . ■

On considère un endomorphisme  $f$  d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension  $n \geq 2$  tel que  $f^n = 0$  et  $f^{n-1} \neq 0$ .

III.B.1) Déterminer l'ensemble des vecteurs  $u$  de  $E$  tels que la famille  $\mathcal{B}_{f,u} = (f^{n-i}(u))_{1 \leq i \leq n}$  soit une base de  $E$ .

**Solution :** Exercice déjà fait et sur lequel j'ai insisté. Il faut ( puisque une famille contenant le vecteur nul est liée) et il suffit que  $u \neq 0_E$  pour que cette famille soit une famille libre ( donc base pour des raisons de cardinal) ( Voir TD6 exo 4) ■

III.B.2) Dans le cas où  $\mathcal{B}_{f,u}$  est une base de  $E$ , quelle est la matrice de  $f$  dans  $\mathcal{B}_{f,u}$ ?

**Solution :** Il s'agit de la matrice carrée d'ordre  $n$  avec partout des zéros sauf en sur diagonale où ne figurent que des 1 ■

III.B.3) Déterminer une base de  $E$  telle que la matrice de  $f$  dans cette base soit  $A_{n-1}$ .

**Solution :** On remplace  $\mathcal{B}_{f,u}$  par  $(x_i = \frac{f^{n-i}(u)}{i!})_{1 \leq i \leq n}$  ■

III.B.4) Donner tous les sous-espaces de  $E$  stables par  $f$ . Combien y en a-t-il ? Donner une relation simple entre ces sous-espaces stables et les noyaux  $\ker(f^i)$  pour  $i$  dans  $\llbracket 0, n \rrbracket$ .

**Solution :** En utilisant le début de cette partie consacré à l'opérateur  $D$ , il vient que ( en assimilant  $f$  à  $D$  restreint à  $\mathbb{K}_{n-1}[X]$  ) tous les sous-espaces de  $E$  stables par  $f$  sont les  $\text{Vect}(x_1, \dots, x_i)$  pour  $0 \leq i \leq n$  qui correspondent à  $\{0\}$  et aux  $\mathbb{K}_m[X]$  ( $0 \leq m \leq n-1$ ).

Nous en disposons de  $n+1$ .

Par ailleurs  $\mathbb{K}_m[X] = \text{Ker}(D^{m+1})$  donc via leur matrice commune  $\text{Vect}(x_1, \dots, x_i) = \text{Ker}(f^i)$  pour  $0 \leq i \leq n$  ■