Devoir à la maison n° 4

Exercice 1. On veut résoudre l'équation d'inconnues $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\arcsin(\sin x) + \arccos(\cos y) = x + y. \quad (E)$$

On note S l'ensemble de ces solutions :

$$S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \arcsin(\sin x) + \arccos(\cos y) = x + y\right\}.$$

1. (a) Montrer que : $\forall y \in [0, 2\pi],\ \arccos(\cos y) = \begin{cases} y & \text{si } y \in [0,\pi], \\ 2\pi - y & \text{si } y \in [\pi, 2\pi]. \end{cases}$
   (b) En déduire $\arccos(\cos y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que si $(x,y) \in S$, alors $(x + 2\pi, y - 2\pi) \in S$ et $(x - 2\pi, y + 2\pi) \in S$.
3. (a) Déterminer les solutions de (E) telles que $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et $y \in \mathbb{R}$.
   (b) Déterminer les solutions de (E) telles que $x \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$ et $y \in \mathbb{R}$.
4. Représenter l'ensemble S dans le plan.

Exercice 2. On souhaite montrer que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$, *a la puissance du continu*, c'est-à-dire qu'il existe une bijection de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ vers $\mathbb{R}$.

1. Montrer que la fonction $g : \begin{cases}]0,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} \end{cases}$ est bijective.
2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $a_0 = 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \dfrac{1}{n}$. On note $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
   On note $\mathbb{B}$ l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ binaires, c'est-à-dire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 0$ ou 1.
   En déterminant directement leurs réciproques, montrer que les applications suivantes sont bijectives :
   (a) $t : \begin{cases} [0,1] & \to &]0,1[\\ x & \mapsto & \begin{cases} a_{n+2} & \text{si } x = a_n \\ x & \text{si } x \notin A \end{cases} \end{cases}$,
   (b) $f : \begin{cases} \mathbb{B} & \to & \mathcal{P}(\mathbb{N}) \\ (u_n) & \mapsto & \{n \in \mathbb{N} \mid u_n = 1\} \end{cases}$. On note c sa réciproque.
3. Soit $b \geq 2$ un entier. On considère l'application $r_b : \begin{cases} \mathbb{B} & \to & [0,1] \\ (u_n) & \mapsto & 0, u_0u_1u_2\ldots \end{cases}$,
   où $0, u_0u_1u_2\ldots$ est une écriture en base b, c'est-à-dire : $0, u_0u_1u_2\ldots = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{b^{k+1}}$.
   (a) Déterminer les images par $r_2 \circ c$ et par $r_{10} \circ c$ de $2\mathbb{N}$, l'ensemble des entiers pairs.
   (b) Justifier que r_{10} est injective.
   (c) Justifier que r_2 est surjective.
   On admet qu'il existe alors une bijection $\tilde{r}$ de $\mathbb{B}$ vers $[0,1]$.
4. Conclure.