DL3 (Mines-Centrale)

Exercice 1 : (Analyse : 30 ')

Soient $a > 0$ et f continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ telle que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^\infty f(x)dx$ converge.

1) Etablir que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(|x|)dx$ converge. Quelle est sa valeur?

2) Etudier sommairement $\phi : t > 0 \to t - \dfrac{a^2}{t}$.

3) Vérifier que $\displaystyle\int_0^\infty f(|\phi(t)|)(1 + \frac{a^2}{t^2})dt$ converge et donner sa valeur.

4) En utilisant un changement de variable motivé par l'expression ou le graphe de ϕ, établir que les intégrales généralisées $\displaystyle\int_0^\infty f(|\phi(t)|)\frac{a^2}{t^2}dt$ et $\displaystyle\int_0^\infty f(|\phi(t)|)dt$ ont même nature. Quelle est-elle? Déterminer $\displaystyle\int_0^\infty f(|\phi(t)|)dt$.

5) Soit $b > 0$, prouver que $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax^2-\frac{b}{x^2}}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-2\sqrt{ab}}$.

On rappelle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$.

Exercice 2 : (Algèbre 1h)

Dans cet exercice on étudie le problème suivant :
Si n est un entier ≥ 1 et $\mathbb{K}$ un corps, on note $\mathbf{MT}(n, \mathbb{K})$ l'affirmation suivante :

- Pour toutes matrices A et B diagonalisables dans $M_n(\mathbb{K})$, la propriété

  (a) A et B commutent

  est équivalente à la propriété

  (b) Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $A + \lambda B$ est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{K})$.

L'un des objectifs de l'exercice est de montrer que cette affirmation est vraie dans le cas complexe pour $n = 2$, qui est un résultat, dans un cas particulier, dû à Motzkin-Taussky, 1952.

Dans toute la suite, lorsqu'il sera demandé d'étudier l'affirmation $\mathbf{MT}(n, \mathbb{K})$, il faudra examiner successivement si les implications $(a) \Longrightarrow (b)$ et $(b) \Longrightarrow (a)$ sont vraies.

Soit $\mathbb{K}$ un corps et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
On considère u et v deux endomorphismes diagonalisables de E qui commutent c'est-à-dire tels que $u \circ v = v \circ u$.

1. Montrer que les sous-espaces propres de v sont stables par u c'est-à-dire que si F est un sous-espace propre de v, on a $u(F) \subset F$.

2. Montrer que u induit sur chaque sous-espace propre de v un endomorphisme diagonalisable.

3. En déduire l'existence d'une base commune de réduction dans E pour les endomorphismes u et v, c'est-à-dire qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que celle ci soit une base de vecteurs propres à la fois de u et de v.

4. Plus généralement, on considère $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'endomorphismes diagonalisables de E; I étant un ensemble fini.
   On suppose en outre que ces endomorphismes commutent deux à deux :
$$((i, j) \in I^2), \quad u_i \circ u_j = u_j \circ u_i.$$

Montrer l'existence d'une base commune de réduction dans E pour la famille $(u_i)_{i\in I}$ c'est-à-dire une base $\mathcal{B}$ de E qui est une base de vecteurs propres pour chaque endomorphisme u_i, $i \in I$.
(*Indication* : on pourra raisonner par récurrence sur la dimension de E).

5. Montrer que l'implication $(a) \Longrightarrow (b)$ est vraie dans l'affirmation $\mathbf{MT}(n, \mathbb{K})$, pour tout entier $n \geq$ et tout corps $\mathbb{K}$.

6. Étudier l'implication $(b) \Longrightarrow (a)$ dans l'affirmation $\mathbf{MT}(2, \mathbb{R})$.

7. On étudie l'implication $(b) \Longrightarrow (a)$ dans l'affirmation $\mathbf{MT}(2, \mathbb{C})$.
Soit A et B deux matrices diagonalisables de $M_2(\mathbb{C})$ satisfaisant à la propriété (b) de $\mathbf{MT}(2, \mathbb{C})$.

8. Montrer que l'on peut se ramener au cas où B est une matrice diagonale de $M_2(\mathbb{C})$ avec au moins une valeur propre nulle.

9. En supposant que B est une matrice diagonale non nulle avec une valeur propre nulle, démontrer l'existence d'un nombre complexe λ_0 tel que $A + \lambda_0 B$ ait une valeur propre double.

10. En déduire que l'implication $(b) \Longrightarrow (a)$ dans $\mathbf{MT}(2, \mathbb{C})$ est vraie.

A rendre OBLIGATOIREMENT lundi 20 novembre au plus tard et plus souhaitable vendredi 17 novembre.