DL3 (INP)

Exercice 1 : (Analyse : 1h)

On rappelle à toutes fins utiles que :
i) $\arctan t = t + o(t)$ au voisinage de 0 et
ii) $\arctan t + \arctan \dfrac{1}{t} = \dfrac{\pi}{2}$ pour tout $t > 0$.
On pose, pour $t > 0$, $f(t) = \dfrac{\arctan(2t) - \arctan(t)}{t}$.
1) Donner des équivalents en 0 et en $+\infty$ de $f(t)$.
2) En déduire que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^\infty f(t)dt$ converge.

On se propose d'en trouver la valeur, notée I et on définit $I(A) = \displaystyle\int_0^A f(t)dt, A > 0$.

3) Etablir successivement, pour $A > 0$,que :
i) $I(A) = \displaystyle\int_0^A \frac{\arctan(2t)}{t}dt - \int_0^A \frac{\arctan(t)}{t}dt$.
ii) $I(A) = \displaystyle\int_A^{2A} \frac{\arctan(t)}{t}dt$.
iii) $\arctan(A) \displaystyle\int_A^{2A} \frac{dt}{t} \leq I(A) \leq \arctan(2A) \int_A^{2A} \frac{dt}{t}$.
4) En déduire I.
5) Donner enfin nature et valeur de $\displaystyle\int_0^\infty \frac{2t^2 - 1}{(1 + 4t^2)(1 + t^2)} \ln t dt$.

Exercice 2 : (Algèbre 1h)
Il s'agit d'un exercice de réflexion. Ne plaquer pas des connaissances sans discernement.
On admet le théorème suivant que l'on pourra utiliser librement :

> Si A est une matrice de $M_n(\mathbb{K})$ telle que son polynôme caractéristique χ_A soit scindé sur $\mathbb{K}$, alors
> il existe un unique couple (D, N) de matrices de $M_n(\mathbb{K})$ vérifiant les quatre propriétés :
>
> (1) $A = D + N$;
>
> (2) D est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{K})$ (pas nécessairement diagonale) ;
>
> (3) N est nilpotente ;
>
> (4) $DN = ND$.
>
> De plus, D et N sont des polynômes en A et $\chi_A = \chi_D$.
> Le couple (D, N) s'appelle la décomposition de Dunford de A.

1) Donner le couple de la décomposition de Dunford d'une matrice A de $M_n(\mathbb{K})$ lorsque A est diagonalisable, puis lorsque la matrice A de $M_n(\mathbb{K})$ est nilpotente.
2)Justifier qu'une matrice trigonalisable vérifie l'hypothèse du théorème, admettant ainsi une décomposition de Dunford.
3)Le couple de matrices $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ est-il la décomposition de Dunford de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$?
4)Donner un exemple d'une matrice de $M_2(\mathbb{R})$ n'admettant pas de décomposition de Dunford dans $M_2(\mathbb{R})$.

5) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.
Calculer son polynôme caractéristique χ_A, puis donner le couple (D, N) de la décomposition de Dunford de A (on utilisera le fait que $\chi_A = \chi_D$).

A rendre OBLIGATOIREMENT lundi 20 novembre au plus tard et plus souhaitable vendredi 17 novembre.