Intégrales généralisées de référence ou classiques

1 Intégrales de référence

1.1 Intégrales généralisées de Riemann et filiation

α étant un réel :

Proposition 1 *o)* $t \to \dfrac{1}{t^\alpha}$ *est continue et positive sur* $\mathbb{R}_+^*$.
i) L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dt}{t^\alpha}$ *converge si et seulement si* $\alpha > 1$.
ii) L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ *converge si et seulement si* $\alpha < 1$.

Autrement dit :

Corollaire 1 $a > 0$ *étant donné :*
i) $t \to \dfrac{1}{t^\alpha} \in L^1(]0,a]) \iff \alpha < 1$.
ii) $t \to \dfrac{1}{t^\alpha} \in L^1([a,+\infty[) \iff \alpha > 1$.

De là par changement de variable affine pertinent et assez évident (les intégrandes étant continues et positives sur $]a,b[$) :

Corollaire 2 $a < b$ *étant des reéls*
i) L'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha} dt$ *converge ssi* $\alpha < 1$.
ii) $\displaystyle\int_a^b \frac{dt}{(b-t)^\alpha} dt$ *converge ssi* $\alpha < 1$.

Il est aisé de traduire ce corollaire en terme d'intégrabilité.

1.2 Intégrales généralisées de type exponentiel

Proposition 2 α *étant un complexe :*
o) $t \to e^{-\alpha t}$ *est continue sur* $\mathbb{R}_+$.
$\displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha t} dt$ *converge (ACV) si et seulement si* $\Re(\alpha) > 0$, *dans ce cas* $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha}$.

Donc dans le même contexte :

Corollaire 3 $t \to e^{-\alpha t} \in L^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}) \iff \Re(\alpha) > 0$.

1.3 Intégrabilité sur]0,1] ou]0,a], a>0 du logarithme

Proposition 3 *o)* $\ln$ *est continue sur]0,1].*
i) $\displaystyle\int_0^1 \ln(t) dt$ *converge (absolument aussi).*
ii) $\ln \in L^1(]0,1])$.

2 Quelques intégrales généralisées classiques

2.1 Les intégrales de Bertrand en $+\infty$

A l'aide de la règle t^γ pour $\alpha \neq 1$ et grâce à une primitivation pour $\alpha = 1$, il vient :

Proposition 4 *o)*$t \to \dfrac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$ *est continue et positive sur* $[2, +\infty[$.

i) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dt}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$ *converge (et dans ce cas absolument)* $\Longleftrightarrow (\alpha > 1$ *ou* $\alpha = 1$ *et* $\beta > 1)$.

ii) Donc pour $a > 1$: $t \to \dfrac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta} \in L^1([a, +\infty[) \Longleftrightarrow (\alpha > 1$ *ou* $\alpha = 1$ *et* $\beta > 1)$.

La positivité et la décroissance de $t \to \dfrac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$ sur $[2, +\infty[$ permettent (comparaison série - intégrale) d'énoncer :

Corollaire 4 *(CNS convergence des séries de Bertrand)*
La série $\displaystyle\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ *converge* $\Longleftrightarrow (\alpha > 1$ *ou* $\alpha = 1$ *et* $\beta > 1)$.

Remarque 1 *Si* $\beta \leq 1$ *alors (cf cours)* $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(\ln k)^\beta} \underset{n \to \infty}{\sim} \int_2^n \frac{dt}{t(\ln t)^\beta}$.

Donc si $\beta < 1$: $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(\ln k)^\beta} \underset{n \to \infty}{\sim} \frac{\ln n}{1 - \beta}$.

Et $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(\ln k)} \underset{n \to \infty}{\sim} \ln(\ln n)$.

2.2 Intégrale de Gauss

Cette intégrale intervient en probabilité dans la loi normale (voir plus bas).

Proposition 5 *i)*$\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ *et* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$ *sont convergentes.*

ii) Pour tout polynôme P, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} P(t) dt$ *est ACV.*

Remarque 2 *En TD corrigé (TD 12 exo 11), il a été prouvé (et nous le remontrerons avec les intégrales à paramètre) que :* $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$ *donc que* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$

Exercice 1 *On se donne un réel* μ *et un réel strictement positif* σ.
Que valent $\displaystyle\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$ *et* $\displaystyle\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$ *?*

Solution 1 *Pour la première on effectue le changement de variable affine* $t = \dfrac{x - \mu}{\sigma\sqrt{2}}$, x *décrivant* $\mathbb{R}$, *dans l'intégrale de Gauss et nous obtenons* $\sqrt{\pi} = \displaystyle\frac{1}{\sigma\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$ *donc* $\displaystyle\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = 1$.
Pour la seconde partons de l'intégrale généralisée convergente $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-t^2} dt$ *et bien sûr de valeur nulle car intégrande impaire et effectuons le même changement de variable affine* ($t = \dfrac{x - \mu}{\sigma\sqrt{2}}$) *dans notre IG nulle, il vient alors* $\displaystyle\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \mu$. *On reconnaît dans cette égalité le calcul de l'espérance mathématique de la loi normale de paramètres* μ,σ. *Dans le cas où celle-ci est réduite et centrée il faut prendre* $\mu = 0$ *et* $\sigma = 1$.

2.3 La fonction Gamma

Ce sous-paragraphe est à posséder comme **incontournable**.

Proposition 6 *On pose sous réserve de sens* $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$.
i) $\Gamma(x)$ *est définie ssi* $x > 0$.
ii) $\forall x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ *(équation fonctionnelle de la fonction* Γ*).*
iii) $\forall n \geq 1$, $\Gamma(n) = (n-1)!$.

Preuve 1 *On pose* $f(t) = e^{-t}t^{x-1}$, *pour* $t > 0$. *Cette fonction est continue (et même* C^1*) et positive là où nous l'avons définie.*
i) Deux bornes problématiques donc protocole habituel et CV = ACV par positivité intégrande :
a) Nature de $\int_0^1 f(t)dt$ *?*
En 0 : $f(t) \sim t^{x-1}$ *(puisque* $e^{-t} \to 1$ *) soit aussi* $f(t) \sim \dfrac{1}{t^{1-x}}$ *et par Riemann en 0 :* $\int_0^1 \dfrac{dt}{t^{1-x}}$ *(A)CV ssi* $1 - x < 1$ *donc par comparaison* $\int_0^1 f(t)dt$ *(A)CV ssi* $x > 0$.
b) Nature de $\int_1^\infty f(t)dt$ *?*
Par croissance comparée usuelle $t^2 f(t) = \dfrac{t^{x+1}}{e^x} \underset{x\to\infty}{\to} 0$ *donc* $f(t) = o(1/t^2)$ *en* $+\infty$ *avec* $\int_1^\infty \dfrac{dt}{t^2}$ *ACV, il en va donc de même par comparaison de* $\int_1^\infty f(t)dt$*, ce pour tout réel* x.
c) Bilan : $\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$ *CV ssi* $x > 0$ *et* Γ *est donc définie uniquement sur* $\mathbb{R}_+^*$ ■
ii) On procède à une IPP (légitime au vu de la régularité des fonctions utilisées) généralisée en se donnant $x > 0$ *à partir de l'expression de* $\Gamma(x+1)$ *(parfaitement définie avec i)) (en primitivant l'exponentielle et en dérivant la puissance de t); le crochet généralisée a du sens car* $t^x(-e^{-t} \to 0$ *en 0 (car* $x > 0$*) et aussi en* $+\infty$ *(par croissance comparée usuelle voir i) b)), il vaut donc 0.*
L'IPP donne alors l'égalité : $\Gamma(x+1) = 0 - \int_0^{+\infty}(-e^{-t})xt^{x-1}dt = x\Gamma(x)$ ■
c) On remarque (intégrale généralisée de référence) que $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1$ *puis que pour tout* $k \geq 1$ *:* $\Gamma(k+1) = k\Gamma(k)$ *(avec b)). Donc* $\Gamma(2) = 1$, $\Gamma(3) = 2$ *et* $\Gamma(4) = 6$. *On valide par une récurrence immédiate la formule* $\boxed{\Gamma(n) = (n-1)!, \text{ pour } n \in \mathbb{N}^*}$ ■
Ce qui permit à Euler d'interpoler la factorielle à l'aide de la fonction Γ.

Exercice 2 *Exprimer l'intégrale de Gauss à l'aide de* Γ *et en déduire* $\Gamma(n + 1/2)$ *pour* $n \in \mathbb{N}$.

Solution 2 *On effectue dans l'intégrale de Gauss* $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$ *le changement de variable légitime* $t = \sqrt{u}$, *où u décrit* $\mathbb{R}_+^*$. *Ce qui donne l'égalité :*
$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \int_0^{+\infty} e^{-u}\dfrac{du}{2\sqrt{u}} = \dfrac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-u}u^{1/2-1}du = \dfrac{\Gamma(1/2)}{2}$ *donc* $\boxed{\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}}$.
A partir de l'équation fonctionnelle satisfaite par Γ*, il vient (récurrence à faire) :*
$\Gamma(n+1/2) = \dfrac{\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)}{2^n}\Gamma(1/2) = \dfrac{(2n)!}{n!2^{2n}}\sqrt{\pi}$ ■

2.4 Intégrale de Dirichlet et filiation

On va s'intéresser principalement aux intégrales généralisées du type : $\int_a^\infty \dfrac{\sin x}{x^\alpha}dx$, $\int_a^\infty \dfrac{\cos x}{x^\alpha}dx$ et $\int_a^\infty \dfrac{e^{ix}}{x^\alpha}dx$, où a, α sont des réels strictement positifs, en précisant leur absolue convergence ou leur convergence.

Proposition 7 *i) Ces trois intégrales généralisées sont ACV ssi $\alpha > 1$.*
ii) Elles sont semi-convergentes sinon.

Preuve 2 *o) On note que les trois intégrandes sont continues et même C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.*
a) Il est aisé (via Riemann et comparaison) et à savoir faire de montrer que si $\alpha > 1$, il y a ACV pour les trois intégrales généralisées.
b) Grâce à une IPP, on montre (cf cours pour l'intégrale de Dirichlet) que, sinon, elles sont convergentes.
c) Reste à vérifier que pour $0 < \alpha \leq 1$, elles ne convergent pas absolument.
Riemann donne immédiatement ceci pour $\displaystyle\int_a^\infty \frac{e^{ix}}{x^\alpha}dx$.
Le changement de variable affine $x = \pi/2 + t$ (et le principe de comparaison) montre que les intégrales généralisées $\displaystyle\int_a^\infty \frac{|\sin x|}{x^\alpha}dx$ et $\displaystyle\int_a^\infty \frac{|\cos x|}{x^\alpha}dx$ sont de même nature.
Si elles convergeaint, il en irait de même (comparaison) pour $\displaystyle\int_a^\infty \frac{\sin^2 x}{x^\alpha}dx$ et $\displaystyle\int_a^\infty \frac{\cos^2 x}{x^\alpha}dx$.
Par linéarité des IG convergentes, $\displaystyle\int_a^\infty \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{x^\alpha}dx$ i.e $\displaystyle\int_a^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ convergerait; ce qui est en contradiction avec la règle de Riemann.
Par conséquent $\displaystyle\int_a^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}dx$, $\displaystyle\int_a^\infty \frac{\cos x}{x^\alpha}dx$ ne convergent pas absolument ■

Exercice 3 *1) Pour quelles valeurs du réel $\alpha > 0$ l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}dx$ est-elle convergente? (rép : $\alpha < 2$)*
2) Pour quelles valeurs du réel $\alpha > 0$ l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^\alpha}dx$ est-elle convergente? (rép : $\alpha < 1$)

On montrera (valeur intégrale de Dirichlet-cf chapitre à venir concernant les intégrales à paramètre-) que
$$\boxed{\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}}$$

Exercice 4 *En utilisant l'identité $\sin(3x) = -4\sin^3(x) + 3\sin(x)$ (valable pour tout réel x), établir que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x}dx$ et déterminer sa valeur.*

Solution 3 *i)Le changement de variable affine $x = 3t$ dans l'intégrale de Dirichlet (convergente par ce qui précède)$\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ conduit à celle de $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(3t)}{t}dt$ et montre aussi l'égalité des valeurs de ces deux IG convergentes.*
ii)) La fonction $x > 0 \to \dfrac{\sin^3 x}{x}$ est continue et la relation trigonométrique donnée permet d'écrire que :
$\forall x > 0,\ \dfrac{\sin^3 x}{x} = \dfrac{3}{4}\dfrac{\sin x}{x} - \dfrac{1}{4}\dfrac{\sin(3x)}{x}$.
Ainsi par linéarité de la convergence des IG et le préambule i), $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^3 x}{x}dx$ converge et sa valeur est $\dfrac{\pi}{4}$ ■