Feuille d'exercices 7
ARITHMÉTIQUE

1 - NOMBRES PREMIERS ET DIVISIBILITÉ

Exercice 1. Soit $n \geq 2$ entier. Montrer qu'il n'existe aucun nombre premier entre $n! + 2$ et $n! + n$.

Exercice 2. Montrer que $\dfrac{\ln 8}{\ln 7}$ est irrationnel.

Exercice 3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 40^n \times n!$ divise $(5n)!$.

Exercice 4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par N le nombre de diviseurs positifs de n et par P leur produit. Quelle relation existe-t-il entre n, N et P ?

Exercice 5. Donner le nombre de 0 apparaissant à la fin de l'écriture décimale du nombre $100!$.

Exercice 6.
(a) Déterminer les entiers $n \in \mathbb{Z}$ tels que $n - 4$ divise $3n - 17$.
(b) Déterminer les entiers $n \in \mathbb{Z}$ tels que $n + 1$ divise $2n^2 - 2n + 4$.

Exercice 7. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations suivantes:
(a) $xy = 3x + 2y$,
(b) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{5}$,
(c) $x^2 - y^2 - 4x - 2y = 5$.

Exercice 8. Soit $n \geq 2$ entier. Soit $n = \displaystyle\prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$ sa décomposition en facteurs premiers. On cherche le nombre $d(n)$ de diviseurs de n.
(a) Déterminer $d(n)$ dans le cas $r = 1$.
(b) En déduire le cas général.

Exercice 9. Soient a et b deux entiers tels que $0 < b < a$, et soit (m, n) dans $\mathbb{N}^2$. Montrer que si m divise n, alors $a^m - b^m$ divise $a^n - b^n$.

Exercice 10. Pour tout nombre premier p, on note $M_p = 2^p - 1$.
(a) Donner quatre nombres M_p premiers. Ces nombres sont appelés *nombres premiers de Mersenne*.
(b) On rappelle qu'un entier est *parfait* s'il est égal à la somme de ses diviseurs stricts. Montrer que si M_p est premier, alors $2^{p-1} M_p$ est parfait.

Exercice 11. Montrer que l'équation $x^3 + x = 1$ a une et une seule solution réelle, puis que cette solution est irrationnelle.

2 - PGCD ET PPCM

Exercice 12. Déterminer le PGCD des entiers suivants :

(a) 27 et 37

(b) 270 et 105

(c) 96842 et 375

Exercice 13. Soit (u_n) la suite de Fibonacci avec $(u_0, u_1) = (0, 1)$. Pour $m \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\mathrm{PGCD}(u_{mn}, u_{m(n+1)})$.

3 - DIVISION EUCLIDIENNE

Exercice 14.

(a) Montrer que le reste de la division euclidienne par 8 du carré d'un entier impair est égal à 1.

(b) Montrer que si x est un entier pair, alors $x^2 = 0 \mod 8$ ou $x^2 = 4 \mod 8$.

(c) Si a, b, c sont trois entiers impairs, en déduire que $a^2 + b^2 + c^2$ n'est pas le carré d'un entier.

Exercice 15. Soit p un nombre premier.

(a) Soit $k \in [\![1, p-1]\!]$. Montrer que p divise $\binom{p}{k}$.

(b) En déduire le *petit théorème de Fermat :* $\forall a \in \mathbb{N}^*$, $a^p = a \mod p$.

Exercice 16. (a) Montrer qu'un entier n est multiple de 9 si et seulement si la somme de ses chiffres est multiple de 9.

(b) Montrer qu'un entier n est multiple de 11 si et seulement si la somme alternée de ses chiffres est multiple de 11.

Exercice 17. Soient n un entier naturel, q et r le quotient et le reste de la division euclidienne de n par 10.

(a) Montrer que n est multiple de 7 si et seulement si $q - 2r$ est multiple de 7.

(b) En déduire un critère de divisibilité par 7. L'appliquer aux entiers 84, 173, 343, 526, 1001, 4345 et 5292.