DL3 (Mines-Centrale) : Corrigé

Exercice 1 : (Analyse : 30 ')
Soient $a > 0$ et f continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ telle que l'intégrale généralisée $\int_0^\infty f(x)dx$ converge.
1) Etablir que l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} f(|x|)dx$ converge. Quelle est sa valeur?
2) Etudier sommairement $\phi : t > 0 \to t - \dfrac{a^2}{t}$.
3) Vérifier que $\int_0^\infty f(|\phi(t)|)(1 + \dfrac{a^2}{t^2})dt$ converge et donner sa valeur.
4) En utilisant un changement de variable motivé par l'expression ou le graphe de ϕ, établir que les intégrales généralisées $\int_0^\infty f(|\phi(t)|)\dfrac{a^2}{t^2}dt$ et $\int_0^\infty f(|\phi(t)|)dt$ ont même nature. Quelle est-elle? Déterminer $\int_0^\infty f(|\phi(t)|)dt$.
5) Soit $b > 0$, prouver que $\int_0^\infty e^{-ax^2 - \frac{b}{x^2}}dx = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}e^{-2\sqrt{ab}}$.
On rappelle que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$.

Solution :
1) Posons, pour tout réel x, $g(x) = f(|x|)$; cette fonction est paire et coincide avec f sur $\mathbb{R}_+$ donc est C_M sur cet intervalle; sa parité implique qu'elle l'est aussi sur $\mathbb{R}_-$ donc sur $\mathbb{R}$ tout entier.
Toujours par parité $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx$ et $\int_0^{+\infty} g(x)dx$ ont même nature. Or $g = f$ sur $\mathbb{R}_+$ et $\int_0^\infty f(x)dx$ converge ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx$ converge bien et sa valeur est $2I$, où on a posé $I = \int_0^\infty f(x)dx$■
2) On obtient facilement que ϕ réalise une bijection C^1, strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$■
3) On procède dans l'intégrale généralisée convergente $\int_{-\infty}^{+\infty} f(|x|)dx$ au changement de variable légitime (cf 2)) : $x = \phi(t)$ $(t > 0)$ qui conduit directement à la convergence de $\int_0^\infty f(|\phi(t)|)(1 + \dfrac{a^2}{t^2})dt$ et à sa valeur : $2I$■
4) Le changement de variable légitime (bijection strictement décroissante, C^1 de $\mathbb{R}_+^*$ sur lui-même) $t = \dfrac{a^2}{u}$ $(u > 0)$ dans l'intégrale généralisée $\int_0^\infty f(|\phi(t)|)dt$ donne (car $\phi(\dfrac{a^2}{u}) = -\phi(u)$) effectivement une même nature pour les deux IG de cette question.
Il semble difficile de conclure quant à cette nature commune dans le cas général (ORAL X un peu détaillé mais dont l'esprit a été conservé) mais on peut le faire si $\int_0^\infty f(x)dx$ converge absolument.
En effet dans ce cas $\int_0^\infty f(|\phi(t)|)(1 + \dfrac{a^2}{t^2})dt$ est ACV et, pour tout réel $t > 0$, nous avons $|f(|\phi(t)|)| \leq f(|\phi(t)|)(1 + \dfrac{a^2}{t^2})$ donc, par domination, $\int_0^\infty f(|\phi(t)|)dt$ est ACV donc CV.
Dans ce contexte nos deux IG convergent et ont même valeur et la somme de leur valeurs est $2I$, par conséquent $\int_0^\infty f(|\phi(t)|)dt = I$■
5) On choisit de prendre $f : x \geq 0 \to e^{-cx^2}$, où $c > 0$ qui est continue, positive et telle que $\int_0^\infty f(x)dx$ soit (A)CV.
Par ailleurs (cf intégrale de Gauss avec chgt de v. affine) $\int_0^\infty f(x)dx = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{c}}$.
Donc avec ce qui précède et pour tout $d > 0$, on a l'égalité :
$\int_0^\infty e^{-ct^2}dt = \int_0^\infty e^{-c(t-\frac{d^2}{t})^2}dt$.

En explicitant : $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{c}} = e^{2cd^2}\int_0^{\infty} e^{-ct^2-\frac{cd^4}{t^2}}\,dt$.

Ainsi en prenant $c = a$ et $d^2 = \sqrt{\frac{b}{a}}$, on obtient ce que l'on veut ■

Exercice 2 : (Algèbre 1h)

Dans cet exercice on étudie le problème suivant :
Si n est un entier ≥ 1 et $\mathbb{K}$ un corps, on note $\mathbf{MT}(n, \mathbb{K})$ l'affirmation suivante :

- Pour toutes matrices A et B diagonalisables dans $M_n(\mathbb{K})$, la propriété

  (a) A et B commutent

  est équivalente à la propriété

  (b) Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $A + \lambda B$ est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{K})$.

L'un des objectifs de l'exercice est de montrer que cette affirmation est vraie dans le cas complexe pour $n = 2$, qui est un résultat, dans un cas particulier, dû à Motzkin-Taussky, 1952.

Dans toute la suite, lorsqu'il sera demandé d'étudier l'affirmation $\mathbf{MT}(n, \mathbb{K})$, il faudra examiner successivement si les implications $(a) \Longrightarrow (b)$ et $(b) \Longrightarrow (a)$ sont vraies.

Soit $\mathbb{K}$ un corps et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
On considère u et v deux endomorphismes diagonalisables de E qui commutent c'est-à-dire tels que $u \circ v = v \circ u$.

1. Montrer que les sous-espaces propres de v sont stables par u c'est-à-dire que si F est un sous-espace propre de v, on a $u(F) \subset F$.
2. Montrer que u induit sur chaque sous-espace propre de v un endomorphisme diagonalisable.
3. En déduire l'existence d'une base commune de réduction dans E pour les endomorphismes u et v, c'est-à-dire qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que celle ci soit une base de vecteurs propres à la fois de u et de v.
4. Plus généralement, on considère $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'endomorphismes diagonalisables de E; I étant un ensemble fini.
   On suppose en outre que ces endomorphismes commutent deux à deux :
   $$((i, j) \in I^2), \quad u_i \circ u_j = u_j \circ u_i.$$
   Montrer l'existence d'une base commune de réduction dans E pour la famille $(u_i)_{i\in I}$ c'est-à-dire une base $\mathcal{B}$ de E qui est une base de vecteurs propres pour chaque endomorphisme u_i, $i \in I$.
   (*Indication* : on pourra raisonner par récurrence sur la dimension de E).
5. Montrer que l'implication $(a) \Longrightarrow (b)$ est vraie dans l'affirmation $\mathbf{MT}(n, \mathbb{K})$, pour tout entier $n \geq$ et tout corps $\mathbb{K}$.
6. Étudier l'implication $(b) \Longrightarrow (a)$ dans l'affirmation $\mathbf{MT}(2, \mathbb{R})$.
7. On étudie l'implication $(b) \Longrightarrow (a)$ dans l'affirmation $\mathbf{MT}(2, \mathbb{C})$.
   Soit A et B deux matrices diagonalisables de $M_2(\mathbb{C})$ satisfaisant à la propriété (b) de $\mathbf{MT}(2, \mathbb{C})$.
8. Montrer que l'on peut se ramener au cas où B est une matrice diagonale de $M_2(\mathbb{C})$ avec au moins une valeur propre nulle.
9. En supposant que B est une matrice diagonale non nulle avec une valeur propre nulle, démontrer l'existence d'un nombre complexe λ_0 tel que $A + \lambda_0 B$ ait une valeur propre double.
10. En déduire que l'implication $(b) \Longrightarrow (a)$ dans $\mathbf{MT}(2, \mathbb{C})$ est vraie.
    Solution :
    1) C'est du cours ■

2) L'endomorphisme u laisse stable chaque sous-espace propre de v donc il induit sur chacun d'eux un endomorphisme. Comme u est diagonalisable, il existe un polynôme scindé à racine simple annulant u. Par restriction, ce polynôme annule chaque endomorphisme induit par u sur les sous-espaces propres de v, qui donc sont diagonalisables■
3) Pour chaque $\lambda \in Sp(v)$, on considère $\mathcal{B}_\lambda$ une base de diagonlisation de l'endomorphisme induit par u sur $E_\lambda(v)$. L'endomorphisme v étant diagonalisable,

$$\mathcal{B} = \bigcup_{\lambda \in Sp(v)} \mathcal{B}_\lambda$$

est une base de E qui vérifie la propriété requise■
4) On raisonne par récurrence sur l'entier $n = \dim E$.
Pour $n = 1$, le résultat est vrai puisque tout endomorphisme est une homothétie et qu'alors toute base de E est une base de diagonalisation.
Supposons le résultat validé jusqu'au rang n et donnons nous E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n+1$ et $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'endomorphismes diagonalisables de E commutant deux à deux.
Si cette famille ne contient que des homothéties, $\mathcal{B}$ une base quelconque de E vérifie la propriété requise et le résultat est vrai au rang $n+1$■
Sinon il existe $i_0 \in I$ tel que u_{i_0} ne soit pas une homothétie. Fixons λ dans $Sp(u_{i_0})$.
Pour tout $i \in I$, u_i est diagonalisable et commute avec u_{i_0} donc μ_i, la restriction de u_i à $E_\lambda(u_{i_0})$ constitue un endomorphisme diagonalisable de $L(E_\lambda(u_{i_0}))$.
Alors $(\mu_i)_{i\in I}$ forme une famille d'endomorphismes diagonalisables de $L(E_\lambda(u_{i_0}))$ qui commutent deux à deux. Comme les propriétés sur u_{i_0} assure $\dim E_\lambda(u_{i_0}) < \dim E$, il vient par hypothèse de récurrence l'existence de $\mathcal{B}_\lambda$ une base commune de réduction dans $E_\lambda(u_{i_0})$ de la famille $(\mu_i)_{i\in I}$.
L'endomorphisme u_{i_0} est diagonalisable donc $\mathcal{B} = \displaystyle\bigcup_{\lambda \in Sp(u_{i_0})} \mathcal{B}_\lambda$ est une base de E qui vérifie la propriété requise alors, d'où le résultat au rang $n+1$.
Il est donc vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$■
5) Considérons A et B deux matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{K})$ vérifiant l'hypothèse (a) dans $\mathbf{MT}(n, \mathbb{K})$. Introduisons u et v les endomorphismes canoniquement associés à A et B dans $\mathbb{K}^n$. Ces endomorphismes commutent et sont diagonalisables.
Introduisons $\mathcal{B}$ une base commune de vecteurs propres à u et v.
Alors $\mathcal{B}$ est une base de vecteurs propres de $u + \lambda v$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$.
Il en découle que $A + \lambda B$ est diagonalisable pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, d'où l'implication annoncée■
6) L'implication (a) entraîne (b) a lieu d'après ce qui précède. Cependant la réciproque est fausse. Il suffit de prendre A et B symétriques réelles et qui ne commutent pas.
Par exemple, on prend

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

■
Il n'y a pas de Q7.
8) (b) entraîne (a) pour le couple (A, B) équivaut (car implique) que cette même implication est vraie pour le couple $(P^{-1}AP, P^{-1}BP)$ et ce quelque soit la matrice inversible de taille n P.
Puisque B dz, on peut donc trouver une telle P de sorte que $P-1BP$ soit diagonale. Ceci valant pour tout ordre.
On ne restreint pas la généralité du problème en retranchant à B une matrice scalaire, ce qui permet de se ramener à $B = \mathrm{Diag}(\alpha, 0)$, où $\alpha \in \mathbb{C}$, d'où ce dernier point■
9) On peut alors se ramener par exemple au cas où $B = \mathrm{Diag}(t, 0)$, où $t \neq 0$.
Posons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \ddots$.
Un calcul sans finesse montre que le discriminant du polynôme caractéristique de $A + \lambda B$ s'écrit alors $(t\lambda + a - d)^2 + 4bc$. Il existe un complexe λ_0 qui annule ce discriminant. La matrice $A + \lambda_0 B$ admet bien une valeur propre double■
10) Premier cas $B = 0_2$ et le résultat est immédiat.
Deuxième cas : $B \neq 0_2$ et on se ramène à a situation de Q9 avec un λ_0 tel que $A + \lambda_0 B$ dz et de spectre réduit à un élément donc scalaire (Cours réduction).
Par conséquent (car toute matrice scalaire commute avec toute matrice) : $B(A + \lambda_0 B) = (A + \lambda_0 B)B$ soit $BA = AB$■