DL3 (INP) : Corrigé

Exercice 1 : (Analyse : 1h)

On rappelle à toutes fins utiles que :
i) $\arctan t = t + o(t)$ au voisinage de 0 et
ii) $\arctan t + \arctan \dfrac{1}{t} = \dfrac{\pi}{2}$ pour tout $t > 0$.
On pose, pour $t > 0$, $f(t) = \dfrac{\arctan(2t) - \arctan(t)}{t}$.
1) Donner des équivalents en 0 et en $+\infty$ de $f(t)$.
2) En déduire que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^\infty f(t)dt$ converge.

On se propose d'en trouver la valeur, notée I et on définit $I(A) = \displaystyle\int_0^A f(t)dt, A > 0$.

3) Etablir successivement, pour $A > 0$,que :
i) $I(A) = \displaystyle\int_0^A \frac{\arctan(2t)}{t}dt - \int_0^A \frac{\arctan(t)}{t}dt$.
ii) $I(A) = \displaystyle\int_A^{2A} \frac{\arctan(t)}{t}dt$.
iii) $\arctan(A)\displaystyle\int_A^{2A} \frac{dt}{t} \leq I(A) \leq \arctan(2A)\int_A^{2A} \frac{dt}{t}$.
4) En déduire I.
5) Donner enfin nature et valeur de $\displaystyle\int_0^\infty \frac{2t^2-1}{(1+4t^2)(1+t^2)} \ln t dt$.

Solution :
1) En 0 : $\mathrm{f(t)} = \dfrac{2t - t + o(t)}{t} = 1 + o(1)$ donc $f(t) \underset{t\to 0}{\to} 1$.
Cette limite est aussi un équivalent en 0 de $f(t)$.
En $+\infty$: Grâce au rappel ii) $f(t) = \dfrac{\arctan 1/t - \arctan 1/2t}{t} \overset{\text{avec i)}}{=} \dfrac{1/2t + o(1/t)}{t} \sim \boxed{\dfrac{1}{2t^2}}$ ■
2) On observe en premier lieu que f est continue et positive sur $\mathbb{R}_+^*$ donc ACV = CV.
Puis on note que $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$ converge dans la mesure où 0 (cf question précédente) est une fausse singularité de f.
Enfin toujours par cette question, sachant que $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dt}{t^2}$ converge absolument, il vient par comparaison que $\displaystyle\int_1^\infty f(t)dt$ est de même nature.
En résumé : $\boxed{\displaystyle\int_0^\infty f(t)dt \text{ converge}}$ ■
3)i) Les intégrandes des deux intégrales généralisées du membre de gauche de l'égalité en vue sont coninues sur l'intervalle $]0, A[$. Grâce au rappel i) : on note que $\dfrac{\arctan(it)}{t} \underset{t\to 0}{\to} i$, ce pour $i = 1, 2$. Ce qui montre la convergence des intégrales généralisées $\displaystyle\int_0^A \frac{\arctan(2t)}{t}dt$ et $\displaystyle\int_0^A \frac{\arctan(t)}{t}dt$; dès lors, par linéarité des intégrales généralisées convergentes, on obtient i)■
ii) On effectue dans $\displaystyle\int_0^A \frac{\arctan(2t)}{t}dt$ le changement de variable affine $t = \dfrac{u}{2}, u \in [0, 2A]$; ceci donne : $\displaystyle\int_0^A \frac{\arctan(2t)}{t}dt = \int_0^{2A} \frac{\arctan(u)}{u}du$. Il suffit alors d'utiliser ii) et Chasles ■

iii) La fonction arctan étant croissante : $\forall t \in [A, 2A]$, $\arctan(A) \leq \arctan(t) \leq \arctan(2A)$; la croissance de l'intégrale dans ii) fait le reste ■

4) On calcule $\int_A^{2A} \frac{dt}{t}$, on trouve $\ln 2$.

Finalement, l'encadrement précédent s'écrit : $\arctan(A) \ln 2 \leq I(A) \leq \arctan(2A) \ln 2$; le théorème des gendarmes implique alors que $I(A) \to \frac{\pi \ln 2}{2}$ si $A \to +\infty$.

Or, par définition de la valeur d'une IG, $\lim_{A \to +\infty} I(A) = I$ donc $\boxed{I = \frac{\pi \ln 2}{2}}$ ■

5) On effectue une IPP généralisée dans $\int_0^{\infty} f(t)dt$ légitimée par les deux points suivants.

a) $t \to 1/t, t \to \arctan(2t) - \arctan(t)$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

En primitivant $t \to 1/t$ et en dérivant l'autre facteur le crochet généralisée $[(\arctan(2t) - \arctan(t)) \ln t]_0^{\infty}$ existe bien (cf première question et limites usuelles) et sa valeur est $0 - 0$.

Donc $\int_0^{\infty} f(t)dt$ est de même nature que (et donc a même valeur que) -$\int_0^{\infty} (\arctan(2t) - \arctan(t))' \ln t dt$.

Un calcul simple montre que cette intégrale est aussi $\int_0^{\infty} \frac{2t^2 - 1}{(1 + 4t^2)(1 + t^2)} \ln t dt$.

Cette intégrale converge bien et sa valeur est $\boxed{I = \frac{\pi \ln 2}{2}.}$ ■

Exercice 2 : (Algèbre 1h)

Il s'agit d'un exercice de réflexion. Ne plaquer pas des connaissances sans discernement.

On admet le théorème suivant que l'on pourra utiliser librement :

> Si A est une matrice de $M_n(\mathbb{K})$ telle que son polynôme caractéristique χ_A soit scindé sur $\mathbb{K}$, alors
> il existe un unique couple (D, N) de matrices de $M_n(\mathbb{K})$ vérifiant les quatre propriétés :
>
> (1) $A = D + N$;
>
> (2) D est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{K})$ (pas nécessairement diagonale) ;
>
> (3) N est nilpotente ;
>
> (4) $DN = ND$.
>
> De plus, D et N sont des polynômes en A et $\chi_A = \chi_D$.
> Le couple (D, N) s'appelle la décomposition de Dunford de A.

1) Donner le couple de la décomposition de Dunford d'une matrice A de $M_n(\mathbb{K})$ lorsque A est diagonalisable, puis lorsque la matrice A de $M_n(\mathbb{K})$ est nilpotente.

2)Justifier qu'une matrice trigonalisable vérifie l'hypothèse du théorème, admettant ainsi une décomposition de Dunford.

3)Le couple de matrices $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ est-il la décomposition de Dunford de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$?

4)Donner un exemple d'une matrice de $M_2(\mathbb{R})$ n'admettant pas de décomposition de Dunford dans $M_2(\mathbb{R})$.

5) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

Calculer son polynôme caractéristique χ_A, puis donner le couple (D, N) de la décomposition de Dunford de A (on utilisera le fait que $\chi_A = \chi_D$).

Solution :

1) La matrice nulle étant diagonalisable, nilpotente et commute avec toute matrice donc le couple de la DDD de A est $(A, 0_n)$ si A est diagonalisable et $(0_n, A)$ si A est nilpotente (puisqu'il convient trivialement et qu'il est unique)■

2) Il suffit de se souvenir que toute matrice trigonalisable (dans $\mathbb{K}$) possède un polynôme caractéristique scindé sur $\mathbb{K}$■

3) Non puisque $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ alors que $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$■

4) On doit donc proposer une matrice de $M_2(\mathbb{R})$ dont le polynôme caractéristique soit $X^2 + 1$ qui est le prototype du polynôme réel non scindé sur $\mathbb{R}$.

La matrice (classique cf DL2 et cours) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ convient en cela.
Mais cette matrice n'a-t-elle pas pour autant une DDD?(Réponse en classe) $\blacksquare$
5) En développant suivant la seconde colonne $\det(\lambda I_3 - A)$, il vient : $\chi_A = (\lambda+1)^3$ donc on a affaire à un polynôme scindé sur $\mathbb{R}$ et A possède bien une (unique) DDD dont l'unique couple se note (D, N).
Comme $\chi_D = \chi_A$, le spectre de D est constitué d'une seule valeur propre -1. Or D est dz donc semblable à une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont ses valeurs propres. Ce qui se résume ici à $D \sim -I_3 \Longleftrightarrow D = -I_3$. Dès lors $N = A + I_3$$\blacksquare$