Devoir à la maison n° 4
CORRIGÉ

Exercice 1.

1. (a)
   - Soit $y \in [0, \pi]$. Comme $\arccos \circ \cos = \mathrm{Id}_{[0,\pi]}$, $\arccos(\cos y) = y$.
   - Soit $y \in [\pi, 2\pi]$. On a $\cos(y) = \cos(-y) = \cos(2\pi - y)$, où $2\pi - y \in [0, \pi]$. Donc $\arccos(\cos y) = 2\pi - y$.

   (b) Comme $\cos$ est 2π-périodique, $\arccos \circ \cos$ aussi. Donc : $\forall k \in \mathbb{Z},\ \forall y \in [2k\pi, (2k+2)\pi]$,

$$\arccos(\cos y) = \begin{cases} y - 2k\pi & \text{si } y \in [2k\pi, (2k+1)\pi], \\ 2\pi - (y - 2k\pi) = (2k+2)\pi - y & \text{si } y \in [(2k+1)\pi, (2k+2)\pi]. \end{cases}$$

2. Soit $(x, y) \in S$. On a alors : $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$ et $\cos(y - 2\pi) = \cos(y)$, donc :

$$\arcsin(\sin(x+2\pi)) + \arccos(\cos(y-2\pi)) = \arcsin(\sin x) + \arccos(\cos y) = x + y = (x+2\pi) + (y-2\pi).$$

   Donc $(x + 2\pi, y - 2\pi) \in S$, et de même $(x - 2\pi, y + 2\pi) \in S$.

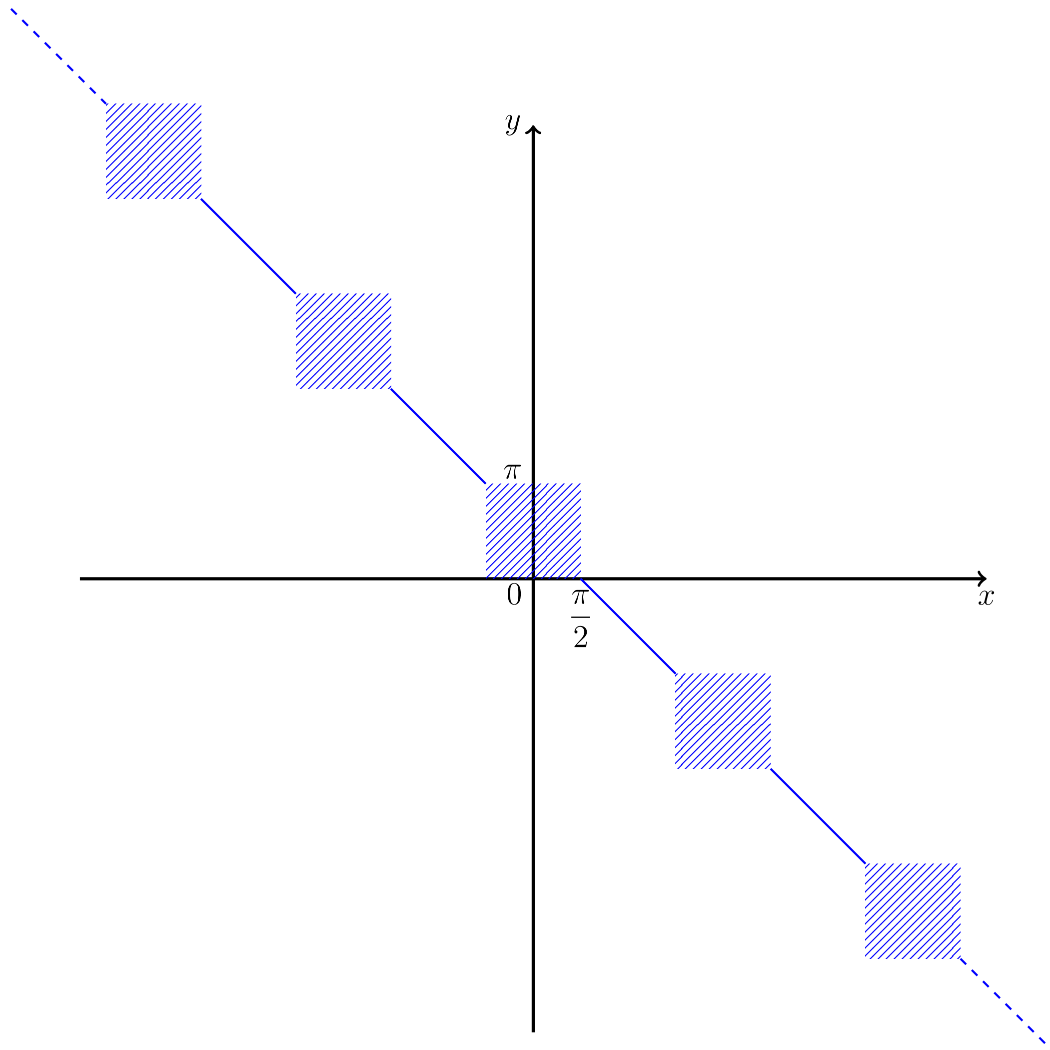
3. (a) Soient $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et $y \in \mathbb{R}$. Alors $\arcsin(\sin x) = x$, donc :

$$\begin{aligned} (x,y) \in S &\Leftrightarrow \arcsin(\sin x) + \arccos(\cos y) = x + y \\ &\Leftrightarrow x + \arccos(\cos y) = x + y \\ &\Leftrightarrow \arccos(\cos y) = y \\ &\Leftrightarrow y \in [0, \pi] \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, \pi]. \end{aligned}$$

   (b) Soient $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ et $y \in \mathbb{R}$. Alors $\arcsin(\sin x) = \pi - x$, donc :

$$\begin{aligned} (x,y) \in S &\Leftrightarrow \arcsin(\sin x) + \arccos(\cos y) = x + y \\ &\Leftrightarrow \pi - x + \arccos(\cos y) = x + y \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \pi - x + y - 2k\pi = x + y & \text{si } \ y \in [2k\pi, (2k+1)\pi] \\ \pi - x + (2k+2)\pi - y = x + y & \text{si } \ y \in [(2k+1)\pi, (2k+2)\pi] \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} - k\pi & \text{si } \ y \in [2k\pi, (2k+1)\pi] \\ y = -x + \left(k + \frac{3}{2}\right)\pi & \text{si } \ y \in [(2k+1)\pi, (2k+2)\pi] \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \text{ et } y \in [0, \pi] \quad \text{ou} \quad x = \frac{3\pi}{2} \text{ et } y \in [-2\pi, -\pi] \\ y = -x + \frac{\pi}{2} \qquad \text{si } \ y \in [-\pi, 0] \end{cases} \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in \left\{\frac{\pi}{2}\right\} \times [0, \pi] \cup \left\{\frac{3\pi}{2}\right\} \times [-2\pi, -\pi] \quad \text{ou} \quad y = -x + \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

4.



Exercice 2.

1. La fonction g est usuellement dérivable sur $]0, 1[$, avec :

$$\forall x \in]0, 1[, \; g'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x-1)^2} < 0.$$

   La fonction g est donc strictement décroissante, donc injective sur $]0, 1[$ d'après le théorème de la bijection monotone. De plus, comme g est continue et décroissante sur $]0, 1[$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires :

$$g(]0, 1[) = \left] \lim_{x \to 1} g(x), \lim_{x \to 0} g(x) \right[\; =] - \infty, +\infty[.$$

   Donc g est surjective de $]0, 1[$ dans $\mathbb{R}$. Donc g est bijective de $]0, 1[$ dans $\mathbb{R}$.

2. (a) Soient x dans $[0,1]$ et $y \in]0,1[$. On a :

$$t(x) = y \Leftrightarrow \begin{cases} y = a_{n+2} & \text{si } x = a_n \\ y = x & \text{si } x \notin A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a_{n-2} & \text{si } y = a_n \\ x = y & \text{si } y \notin A \end{cases},$$

donc t est bijective, avec :

$$t^{-1} : \begin{cases}]0,1[& \to & [0,1] \\ y & \mapsto & \begin{cases} a_{n-2} & \text{si } y = a_n \\ y & \text{si } y \notin A \end{cases} \end{cases}.$$

(b) Soient $(u_n) \in \mathbb{B}$ et $E \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. On a :

$$\begin{aligned} f((u_n)) = E & \Leftrightarrow E = \{n \in \mathbb{N} \mid u_n = 1\} \\ & \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 1 \text{ si } n \in E,\ 0 \text{ sinon} \\ & \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 1_E(n). \end{aligned}$$

Donc f est bijective, avec :

$$c = f^{-1} : \begin{cases} \mathcal{P}(\mathbb{N}) & \to & \mathbb{B} \\ E & \mapsto & (1_E(n)). \end{cases}.$$

3. (a) Notons (u_n) la suite $c(2\mathbb{N})$, c'est la suite 2-périodique $(1,0,1,0...)$. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a alors :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{2^{k+1}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \cdots = \frac{1}{2} \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{1 - \frac{1}{4}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3},$$

donc $r_2 \circ c(2\mathbb{N}) = \dfrac{2}{3}$. De même :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{10^{k+1}} = \frac{1}{10} + \frac{1}{1000} + \cdots = \frac{1}{10} \frac{1 - \left(\frac{1}{100}\right)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{1 - \frac{1}{100}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{10} \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{10}{99},$$

donc $r_{10} \circ c(2\mathbb{N}) = \dfrac{10}{99}$.

(b) Soient (u_n) et (v_n) dans $\mathbb{B}$ telles que $r_{10}((u_n)) = r_{10}((v_n))$. Alors $0, u_0u_1u_2 \ldots = 0, v_0v_1v_2 \ldots$ donc, par unicité de l'écriture décimale : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n$. Donc $(u_n) = (v_n)$, donc r_{10} est injective.

(c) Soit $x \in [0,1]$. Par existence de l'écriture binaire de x, il existe $(u_n) \in \mathbb{B}$ telle que $x = 0, u_0u_1u_2 \ldots$. Plus précisément : pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est le reste de $\lfloor 2^{n+1}x \rfloor$ dans la division euclidienne par 2. On a alors $x = r_2((u_n))$. Donc r_2 est surjective.

Il existe donc une injection et une surjection de $\mathbb{B}$ *vers* $[0,1]$. *Le* théorème de Cantor-Bernstein *assure alors l'existence d'une bijection entre ces deux ensembles.*

4. D'après les questions précédentes, l'application $g \circ t \circ \tilde{r} \circ c$ réalise une bijection de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ vers $\mathbb{R}$. Donc $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ a la puissance du continu.