Feuille d'exercices 8
PRIMITIVES

1 - CALCULS DE PRIMITIVES

Exercice 1. Déterminer les primitives suivantes :

(a) $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^2}dx$, (b) $\displaystyle\int 3x\sqrt{1+x^2}dx$, (c) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln(x^2)}$, (d) $\displaystyle\int \frac{x-1}{\sqrt{x(x-2)}}dx$.

Exercice 2. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Déterminer $\displaystyle\int \frac{dt}{t-\alpha}$.

Exercice 3. Montrer que la fonction indicatrice de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$ n'admet pas de primitive sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4.

(a) Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0, \end{cases}$ n'est pas continue en 0.

(b) Montrer que la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0, \end{cases}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2 - CALCULS D'INTÉGRALES

Exercice 5. On considère

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x}dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}dx.$$

Déterminer $I + J$ et $I - J$. En déduire I et J.

Exercice 6. Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_0^{4\pi} \cos(t)e^{\sin(t)}dt$, (b) $\displaystyle\int_4^6 \frac{4}{(t-3)(t+1)}dt$, (c) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{1-t^2}$, (d) $\displaystyle\int_6^8 \frac{dt}{t^2-4t-5}$.

Exercice 7. Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$. Déterminer le discriminant du polynôme $P(\lambda) = \displaystyle\int_a^b (f + \lambda g)^2$. En déduire l'inégalité suivante, dite *de Cauchy-Schwarz* :

$$\left(\int_a^b fg\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right).$$

En déterminer la condition d'égalité.

Exercice 8. Soit $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$. Calculer $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(px)\sin(qx)dx$.

Exercice 9. Calculer les primitives suivantes :

(a) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+3x-10}dx$, (b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-6x+9}$, (c) $\displaystyle\int \frac{dx}{8x^2+50}$, (d) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-8x+20}$.

3 - Intégration par parties et changement de variables

Exercice 10. Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_1^e x\ln x dx$, (b) $\displaystyle\int_0^1 \arctan t dt$, (c) $\displaystyle\int_0^\pi e^{4t}\cos(3t)dt$.

Exercice 11. Calculer les intégrales suivantes, où a, b, n sont des entiers naturels :

(a) $\displaystyle\int_1^e (\ln(t))^2 dt$, (b) $\displaystyle\int_0^1 x^a(1-x)^b dx$, (c) $\displaystyle\int_0^1 x^a(\ln x)^b dx$, (d) $\displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^n dt$.

Exercice 12. On considère : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin x dx$.

(a) Établir une formule de récurrence pour I_n.

(b) Exprimer I_n sous forme de somme.

Exercice 13. Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_1^4 \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$, (b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^x}{1+e^x}dx$, (c) $\displaystyle\int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x}dx$, (d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \cos(\sqrt{x})dx$.

Exercice 14.

(a) Montrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos t)\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right) dt$.

(b) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan t)\, dt$.

Exercice 15. Déterminer $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}dx$. En déduire l'aire d'un disque de rayon 1.

Exercice 16. En utilisant les règles de Bioche, calculer les primitives suivantes :

(a) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{1+\cos x}dx$, (b) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin^2 x-\cos^2 x}dx$, (c) $\displaystyle\int \frac{3-\sin x}{\cos x+3\tan x}dx$, (d) $\displaystyle\int \cos^2 x\sin^2 x dx$.

Exercice 17. En posant $t=\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$, calculer les intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}$, (b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2-\sin x}$, (c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin x-\cos x+\sqrt{2}}$.

Exercice 18. On souhaite calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dt}{\cos t}$.

(a) À l'aide des formules trigonométriques, vérifier que $\cos t = \dfrac{1-\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}$.

(b) Effectuer alors le changement de variable $x=\tan\left(\dfrac{t}{2}\right)$ et montrer que $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{2\,dx}{1-x^2}$.

(c) En écrivant $\dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{\alpha}{1-x}+\dfrac{\beta}{1+x}$ où α et β sont à déterminer, déterminer la valeur de I.