Devoir surveillé n° 3

Durée : 3 heures. Calculatrices non autorisées.
La notation tiendra largement compte de la qualité de la rédaction.
Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre souhaité.
Les exercices qui ne sont pas traités dans l'ordre doivent être rédigés sur des copies séparées.
Le sujet et le brouillon ne sont pas à rendre. Le barème est indicatif.

Exercice 1. *(8 points)* On note $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. On considère la fonction $f = \operatorname{argsh} \circ \tan : I \to \mathbb{R}$.

1. (a) Montrer que f est bien définie (c'est-à-dire que : $\forall x \in I,\ f(x)$ existe).
   (b) Déterminer le domaine de dérivabilité de f, et calculer sa dérivée.
   (c) Montrer que f est bijective.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $t = f^{-1}(x)$.
   (a) Montrer que $\tan\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ est bien défini et positif.
   (b) Montrer que : $e^x = \dfrac{\sin(t) + 1}{\cos(t)}$.
   (c) En déduire que : $x = \ln\left(\tan\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$.

Exercice 2. *(6 points)* Soient E et F deux ensembles, et soit $f : E \to F$ une application.

1. Montrer que : $\forall A, B \in \mathcal{P}(E),\ f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
2. Dans cette question seulement, on pose $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{cases}$, $A = [-1, 2]$ et $B = [-2, 1]$.
   Montrer que $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$.
3. Montrer que, si f est injective, alors : $\forall A, B \in \mathcal{P}(E),\ f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$.
4. On suppose que : $\forall A, B \in \mathcal{P}(E),\ f(A) \cap f(B) = f(A \cap B)$.
   Montrer que f est injective.
5. En déduire une condition nécessaire et suffisante d'injectivité de f.

Exercice 3. *(6 points)* Pour tout entier naturel non nul n, on note $S(n)$ la somme de ses diviseurs positifs.

1. Calculer $S(28)$, $S(32)$, $S(60)$.
2. Calculer $S(n)$ lorsque $n = p^\alpha$, où p est un nombre premier et $\alpha \in \mathbb{N}^*$.
3. Calculer $S(n)$ lorsque $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}$, où p_1, p_2 sont premiers et $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{N}^*$.
4. Énoncer le théorème fondamental de l'arithmétique. En déduire $S(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
5. Montrer que, si deux entiers m et n sont premiers entre eux, alors $S(mn) = S(m)S(n)$.

Problème. *(12 points)* On considère la fonction f définie, pour x appartenant à son domaine de définition, par :

$$f(x) = \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) + \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right).$$

I. 1. Soit $g : x \mapsto \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

   i. Déterminer le domaine de définition G de g.

   ii. Déterminer son ensemble image $g(G)$.

2. Faire de même avec la fonction $h : x \mapsto \dfrac{2x}{1+x^2}$.

3. En déduire le domaine de définition D de f.

II. 1. Rappeler le domaine de définition I des fonctions $\arccos$ et $\arcsin$.

2. Déterminer, pour tout $y \in I$, $\arccos(-y)$ en fonction de $\arccos(y)$, et $\arcsin(-y)$ en fonction de $\arcsin(y)$.

3. Soit $x \in D \setminus \{0\}$. Calculer $f\left(\dfrac{1}{x}\right) + f(-x)$.

III. 1. Déterminer le domaine de dérivabilité D' de f.

2. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in D'$. On simplifiera au maximum en distinguant quatre cas.

3. En déduire, à des constantes près, une expression plus simple de $f(x)$ pour tout $x \in D'$, en distinguant les cas.

4. Déterminer ces constantes, et en déduire $f(x)$ pour tout $x \in D$.