Devoir surveillé n° 3
CORRIGÉ

Exercice 1.

1. (a) La fonction $\tan$ est définie sur I et la fonction argsh est définie sur $\mathbb{R}$, donc f est définie sur I.

   (b) Les fonctions $\tan$ et argsh sont usuellement dérivables sur I et $\mathbb{R}$ respectivement, donc f est dérivable sur I. On a :
$$\forall x \in I, \quad f'(x) = \frac{\tan'(x)}{\sqrt{1+\tan^2(x)}} = \sqrt{1+\tan^2(x)} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2(x)}} = \frac{1}{\cos(x)},$$
   car : $\forall x \in I,\ \cos(x) > 0$.

   (c) D'après le calcul ci-dessus : $\forall x \in I,\ f'(x) > 0$. Donc f est strictement croissante sur I, donc, d'après le théorème de la bijection monotone, f est injective.
   De plus, f est continue sur I car dérivable sur I donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $f(I) = \left]\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}} f(x), \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)\right[=]-\infty, +\infty[$. Donc f est surjective.
   Donc f est bijective.

2. (a) Par définition de t : $t \in I$, donc $\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Comme $\tan$ est définie et positive sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\tan\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$ est bien défini et positif.

   (b) On a :
$$t = f^{-1}(x) = \arctan(\operatorname{sh}(x)) \text{ donc } \operatorname{sh}(x) = \tan(t) \text{ donc } e^x - e^{-x} = 2\tan(t).$$
   Notons $X = e^x$, alors : $X - \frac{1}{X} = 2\tan(t)$, donc $X^2 - 2\tan(t)X - 1 = 0$. Cette équation du second degré a pour discriminant $\Delta = 4\tan^2(t) + 4 > 0$, donc pour racines :
$$X_{1,2} = \frac{2\tan(t) \pm 2\sqrt{1+\tan^2(t)}}{2} = \tan(t) \pm \frac{1}{\cos(t)} = \frac{\sin(t) \pm 1}{\cos(t)}.$$
   Comme $X = e^x > 0$, on a donc : $e^x = \frac{\sin(t)+1}{\cos(t)}$.

   (c) On a :
$$e^x = \frac{\sin(t)+1}{\cos(t)} = \frac{1-\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{2\sin^2\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} = \tan\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right),$$
   d'où $x = \ln\left(\tan\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

Exercice 2.

1. Soient A, B des parties de E. Soit $x \in f(A \cap B)$.
Soit alors $t \in A \cap B$ tel que $x = f(t)$. Alors $t \in A$, donc $x = f(t) \in f(A)$, et $t \in B$, donc $x = f(t) \in f(B)$. Donc $x \in f(A) \cap f(B)$.
Donc $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
2. La fonction f est usuellement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$, et continue sur $\mathbb{R}$, donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires :
$$f(A) = f([-1, 0]) \cup f([0, 2]) = [f(0), f(-1)] \cup [f(0), f(2)] = [0, 1] \cup [0, 4] = [0, 4],$$
et de même $f(B) = [0, 4]$. Donc $f(A) \cap f(B) = [0, 4]$. Or $A \cap B = [-1, 1]$, donc de même : $f(A \cap B) = [0, 1] \neq f(A) \cap f(B)$.
3. Supposons f injective. Soient A, B des parties de E. Soit $x \in f(A) \cap f(B)$.
Alors $x \in f(A)$, donc il existe $t_1 \in A$ tel que $x = f(t_1)$ et $x \in f(B)$, donc il existe $t_2 \in B$ tel que $x = f(t_2)$. Or f est injective, donc $t_1 = t_2$, donc t_1 (c'est-à-dire t_2) $\in A \cap B$. Donc $x = f(t_1) \in f(A \cap B)$.
Donc $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$.
4. Soient $x_1, x_2 \in E$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$.
Prenons $A = \{x_1\}$ et $B = \{x_2\}$. On a $f(A) \cap f(B) = \{f(x_1)\}$; par ailleurs, $A \cap B = \{x_1\}$ si $x_1 = x_2$, $A \cap B = \emptyset$ sinon ; donc $f(A \cap B) = \{f(x_1)\}$ si $x_1 = x_2$, $f(A \cap B) = \emptyset$ sinon. Donc, comme $f(A) \cap f(B) = f(A \cap B)$, $x_1 = x_2$.
Donc f est injective.
5. D'après les résultats précédents, f est injective si et seulement si : $\forall A, B \in \mathcal{P}(E),\ f(A) \cap f(B) = f(A \cap B)$.

Exercice 3.

1.
   - Les diviseurs de 28 sont $1, 2, 4, 7, 14, 28$, donc $S(28) = 1 + 2 + 4 + 7 + 14 + 28 = 56$.
   - Les diviseurs de 32 sont $1, 2, 4, 8, 16, 32$, donc $S(28) = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 63$.
   - Les diviseurs de 60 sont $1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60$, donc $S(60) = 1+2+3+4+5+6+10 + 12 + 15 + 20 + 30 + 60 = 168$.
2. Dans ce cas, les diviseurs de n sont $1, p, p^2, \ldots, p^\alpha$, donc, d'après la formule de somme des termes d'une suite géométrique :
$$S(p^\alpha) = 1 + p + p^2 + \cdots + p^\alpha = \frac{1 - p^{\alpha+1}}{1 - p} = \frac{p^{\alpha+1} - 1}{p - 1}.$$
3. Dans ce cas, les diviseurs de n sont les $p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2}$ tels que $\beta_1 \in [\![0, \alpha_1]\!],\ \beta_2 \in [\![0, \alpha_2]\!]$. Donc :
$$S(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}) = \sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1} \sum_{\beta_2=0}^{\alpha_2} p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} = \left(\sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1} p_1^{\beta_1}\right) \left(\sum_{\beta_2=0}^{\alpha_2} p_2^{\beta_2}\right) = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1}.$$
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Selon le théorème fondamental de l'arithmétique, il existe $r \in \mathbb{N}^*$ et $p_1, \ldots, p_r$ premiers, $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{N}^*$ uniques à l'ordre près tels que $n = \displaystyle\prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$.

Les diviseurs de n sont alors les $\prod_{i=1}^{r} p_i^{\beta_i}$ avec : $\forall i \in [\![1, r]\!],\ \beta_i \in [\![0, \alpha_i]\!]$, donc :

$$S(n) = \sum_{(\beta_1,\dots,\beta_r)\in[\![0,\alpha_1]\!]\times\cdots\times[\![0,\alpha_r]\!]} \prod_{i=1}^{r} p_i^{\beta_i} = \prod_{i=1}^{r} \sum_{\beta_i=0}^{\alpha_i} p_i^{\beta_i} = \prod_{i=1}^{r} \frac{p_i^{\alpha_i+1}-1}{p_i-1}.$$

5. Soient m et n premiers entre eux. Notons $m = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$ et $n = \prod_{i=1}^{s} q_i^{\gamma_i}$, où les p_i et les q_i sont distincts entre eux. Alors : $mn = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i} \prod_{i=1}^{s} q_i^{\gamma_i}$, donc, d'après les calculs précédents :

$$S(mn) = \prod_{i=1}^{r} \frac{p_i^{\alpha_i+1}-1}{p_i-1} \prod_{i=1}^{s} \frac{q_i^{\gamma_i+1}-1}{q_i-1} = S(m)S(n).$$

Problème.

I. 1. i. La fonction g est définie lorsque $1 + x^2 \neq 0$, ce qui est vrai pour tout réel x. Donc $G = \mathbb{R}$.

ii. La fonction g est usuellement dérivable sur $\mathbb{R}$, et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = \frac{-2x(1+x^2) - 2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = -\frac{4x}{(1+x^2)^2} \geq 0 \text{ si } x \leq 0,\ \leq 0 \text{ si } x \geq 0.$$

Donc g est croissante sur $\mathbb{R}_-$, décroissante sur $\mathbb{R}_+$. De plus, g est usuellement continue sur $\mathbb{R}$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires :

$$g(\mathbb{R}) = \left]\lim_{x\to-\infty} g(x), g(0)\right] \cup \left]\lim_{x\to+\infty} g(x), g(0)\right] =]-1,1] \cup]-1,1] =]-1,1].$$

2. La fonction h est, de même que g, définie sur $\mathbb{R}$, usuellement dérivable sur $\mathbb{R}$, et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h'(x) = \frac{2(1+x^2) - 2x \times 2x}{(1+x^2)^2} = 2\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \geq 0 \text{ si } x \in [-1,1],\ < 0 \text{ sinon.}$$

Donc h est décroissante sur $]-\infty,-1]$, croissante sur $[-1,1]$, décroissante sur $[1,+\infty[$. De plus, h est usuellement continue sur $\mathbb{R}$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires :

$$h(\mathbb{R}) = [h(-1), \lim_{x\to-\infty} h(x)[\cup [h(-1),h(1)] \cup] \lim_{x\to+\infty} h(x), h(1)] = [-1,0[\cup [-1,1] \cup]0,1] = [-1,1].$$

3. Les fonctions g et h sont définies sur $\mathbb{R}$ et ont pour ensembles images respectifs $]-1,1]$ et $[-1,1]$, sur lesquels sont définies $\arccos$ et $\arcsin$ respectivement. Donc $D = \mathbb{R}$.

II. 1. $I = [-1,1]$.

2. Soit $y \in I$. Notons $\theta = \arccos(y)$, c'est-à-dire que $\cos\theta = y$ et $\theta \in [0,\pi]$. L'angle de $[0,\pi]$ ayant pour cosinus $-y$ est alors $\pi - \theta$, donc : $\arccos(-y) = \pi - \arccos(y)$.
De plus, la fonction $\arcsin$ étant impaire : $\arcsin(-y) = \arcsin(y)$.

3. On a :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{x}\right) &= \arccos\left(\frac{1-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}\right)+\arcsin\left(\frac{\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}\right) \\ &= \arccos\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)+\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)=\pi-\arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)+\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right), \end{aligned}$$

et :

$$f(-x)=\arccos\left(\frac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2}\right)+\arcsin\left(\frac{-2x}{1+(-x)^2}\right)=\arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)-\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right),$$

donc :

$$f\left(\frac{1}{x}\right)+f(-x)=\pi.$$

III. 1. On a vu que les fonctions g et h sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Les fonctions $\arccos$ et $\arcsin$ sont dérivables sur $]-1,1[$, avec : $g(x)\in\{-1,1\}\Leftrightarrow x=0$, $h(x)\in\{-1,1\}\Leftrightarrow x=-1$ ou 1. Donc $D'=\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$.

2. Soit $x\in D'$. On a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{g'(x)}{\sqrt{1-g(x)^2}}+\frac{h'(x)}{\sqrt{1-h(x)^2}} \\ &= \frac{\frac{4x}{1+x^2}}{\sqrt{(1+x^2)^2-(1-x^2)^2}}+\frac{2\frac{1-x^2}{1+x^2}}{\sqrt{(1+x^2)^2-(2x)^2}} \\ &= \frac{x}{|x|}\frac{2}{1+x^2}+\frac{1-x^2}{|1-x^2|}\frac{2}{1+x^2} \\ &= \begin{cases} -\frac{4}{1+x^2} & \text{si } x\in]-\infty,-1[\\ 0 & \text{si } x\in]-1,0[\\ \frac{4}{1+x^2} & \text{si } x\in]0,1[\\ 0 & \text{si } x\in]1,+\infty[\end{cases}. \end{aligned}$$

3. D'après le calcul précédent, il existe $c_1,c_2,c_3,c_4\in\mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x\in D',\quad f(x)=\begin{cases} -4\arctan(x)+c_1 & \text{si } x\in]-\infty,-1[\\ c_2 & \text{si } x\in]-1,0[\\ 4\arctan(x)+c_3 & \text{si } x\in]0,1[\\ c_4 & \text{si } x\in]1,+\infty[\end{cases}.$$

4. La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$, on a :

- En -1 : $-4\arctan(-1)+c_1=c_2=f(-1)=\arccos(0)+\arcsin(-1)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=0$, donc $c_1=4\arctan(-1)=-\pi$ et $c_2=0$,
- En 1 : $4\arctan(1)+c_3=c_4=f(1)=\arccos(0)+\arcsin(1)=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$, donc $c_3=\pi-4\arctan(1)=0$ et $c_4=\pi$. Donc :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)=\begin{cases} -4\arctan(x)-\pi & \text{si } x\in]-\infty,-1] \\ 0 & \text{si } x\in[-1,0] \\ 4\arctan(x) & \text{si } x\in[0,1] \\ \pi & \text{si } x\in[1,+\infty[\end{cases}.$$