Suites de fonctions

1 Notations et considérations générales

X désigne une partie non vide de $\mathbb{R}$, I un intervalle non trivial.
(f_n) est une suite de fonctions de X (resp. de I) dans $\mathbb{K}$ qui, comme d'habitude est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Ceci signifie que $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est une fonction définie de X dans $\mathbb{K}$.
On note $E = B(X, \mathbb{K})$ le sous-espace vectoriel de $F(X, \mathbb{K})$ constitué des éléments bornés sur X.
On a vu que cet espace vectoriel pouvait être normé par $||.||_\infty^X$, définie par : $\forall f \in E$,

$$||f||_\infty^X = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

On rappelle qu'un segment est un intervalle fermé borné et que sur un tel ensemble une fonction continue est bornée et atteint ses bornes donc possède un maximum.

2 Convergence simple d'une suite de fonctions

Définition 1 *On dit que la suite (f_n)* ***converge simplement sur*** *X si :*
$\forall x \in X$, la suite (à termes dans $\mathbb{K}$) $(f_n(x))$ est convergente.
Dans ce cas, la fonction $f : x \in X \to \lim_{n \to \infty} f_n(x)$ est ***la limite simple sur X de la suite de fonctions*** *(f_n).*
On dira aussi que ***la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers f sur X.***
En symbolique ceci se note : $f_n \overset{CVS}{\to} f$ sur X.

Voici comment vous devrez procéder afin d'étudier la convergence simple sur un ensemble X d'une suite de fonctions (f_n).

Règle 1 *On fixe un réel $x \in X$ et on étudie la convergence de la suite de réels ou de complexes $(f_n(x))$.*
S'il y a convergence, on note L_x la limite de cette suite.
Si cette convergence est satisfaite pour tout $x \in X$, il y a bien CVS sur X de (f_n) et la limite simple (sur X) de cette suite est $f : x \in X \to L_x$.

Exercice 1 *On pose, pour tout réel x et tout entier naturel $n \geq 1$, $f_n(x) = (1 + x/n)^n$.*
Prouver que la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers l'exponentielle.

Remarque 1 *La convergence simple est un mode de convergence trop rudimentaire, on a vu en classe qu'il ne stabilisait ni la continuité, ni la dérivabilite, ni même la bornitude.*
A cet égard, nous allons présenter un mode de convergence plus exigeant et beaucoup plus délicat à comprendre mais qui lui, comblera peu ou prou les manques précédents.

3 Convergence uniforme d'une suite de fonctions

3.1 Généralités

Définition 2 *Soit $f : X \to \mathbb{K}$.*
On dit que la suite (f_n) ***converge uniformément sur*** *X vers f si :*
i) $\exists n_0, \forall n \geq n_0, f_n - f \in E$.
ii) $||f_n - f||_\infty^X \underset{n \to \infty}{\to} 0$.
Dans ce cas f est la limite uniforme sur X de la suite de fonctions (f_n).
En abrégé : $f_n \overset{CVU}{\to} f$ sur X.

Proposons une caractérisation, démontrée en classe, plus concrète de cette définition.

Proposition 1 *Les assertions suivantes sont équivalentes :*
i) $f_n \overset{CVU}{\to} f$ *sur* X.
ii) Il existe une suite de réels (α_n) *convergeant vers 0 et telle que :*
$||f_n - f||_\infty^X \leq \alpha_n$ *APCR.*

Là encore, en se donnant une éventuelle limite uniforme f (voir paragraphe suivant pour la déterminer) de notre suite de fonctions (f_n); nous fixons une méthode qu'il est conseillé de suivre.

Règle 2 *On cherche un majorant* α_n*, pour* n *fixé, de la fonction* $|f_n - f|$ *sur* X*; cette recherche est facilitée si* X *est un segment et il est toujours possible (au moins si* $K = \mathbb{R}$*) (dans le cas général) d'étudier les variations de la fonction* $f_n - f$ *si sa régularité le permet. Puis on voit si la suite* (α_n) *converge vers 0.*

Exercice 2 *Soient* $0 < a < b$ *et On pose, pour tout réel* $x \in S = [a, b]$ *et tout entier naturel* n, $f_n(x) = nxe^{-nx}$.
Prouver que la suite (f_n) *converge uniformément sur* S *vers la fonction nulle.*
(On a sans peine que $\alpha_n = \dfrac{nb}{e^{na}} \to 0$*, par croissance comparée usuelle).*

La proposition précédente (dont on garde les notations) permet aussi de prouver qu'il n'y a pas convergence uniforme (On verra d'autre approches de cette même problématique plus loin).

Corollaire 1 *Soit* $f : X \to \mathbb{K}$.
S'il existe une suite (x_n) *à termes dans* X *telle que la suite* $(f_n(x_n) - f(x_n))$ *ne converge pas vers 0 alors la suite de fonctions* (f_n) *ne converge pas unifomément vers* f *sur* X.

Exercice 3 *On pose, pour tout réel* $x \geq 0$ *et tout entier naturel* n, $f_n(x) = nxe^{-nx}$.
Prouver que la suite (f_n) *ne converge pas uniformément sur* $\mathbb{R}_+$ *vers la fonction nulle.*
(L'exercice précédent motive le choix d'une suite convergeant vers 0, la suite $(1/n)$ *convient à cet effet puisque* $f_n(1/n) = 1/e$*, pour tout* $n \geq 1$ *).*

subsectionComparaison des modes de convergence Commençons par le théorème principal dont la démonstration est quasi-évidente (comme toujours $f : X \to \mathbb{K}$).

Théorème 1 $\boxed{f_n \overset{CVU}{\to} f \text{ sur } X \Longrightarrow f_n \overset{CVS}{\to} f \text{ sur } X}$

Remarque 2 *i) La réciproque est fausse (cf exercice 3 dans lequel la suite de fonctions converge simplement sur* $\mathbb{R}_+$*, comme on le vérifie aisément, vers la fonction nulle alors qu'elle ne converge pas uniformément vers cell-ci sur* $\mathbb{R}_+$*).*
ii) Le théorème montre aussi que la limite simple est nécessairement la limite uniforme; il est donc souvent utile (pour trouver la limite) de commencer par l'étude de la convergence simple.

Il est intéressant de quantifier les définitions des convergences simples et uniforme pour comprendre leur différence et leur hiérarchie (on garde les notations du théorème).

Remarque 3 *i)* $f_n \overset{CVS}{\to} f$ *sur* $X \iff \forall x \in X, \forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$.
On voit donc dans cet énoncé quantifié que n_0 *dépend de* x*, il s'agit donc d'une convergence individuelle. En revanche comme :*
ii) $f_n \overset{CVU}{\to} f$ *sur* $X \iff \forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall x \in X, \forall n \geq n_0, |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$.
Cette fois n_0 *ne dépend pas de* x*, il s'agit d'une convergence collective.*

Enfin et pour mettre la notion de CVU (la CVS échappe à cette traduction de part son caractère individualiste) en relation avec celle de convergence de suites dans un espace vectoriel normé, il faut être conscient de ce point.

Proposition 2 *Soit $f : X \to \mathbb{K}$.*

$\boxed{f_n \overset{CVU}{\to} f \text{ sur } X \iff (f_n) \to f \text{ dans l'evn } (B(X,\mathbb{K}), ||.||_\infty^X).}$

Graphiquement (donc fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$) la proposition précédente prouve que si on considère le graphe de f en tranlatant celui-ci de $\mp\epsilon$, les graphes des fonctions f_n sont tous (APCR) dans la zone que délimite ces deux graphes translatés.