

---

DS 3 (4 heures).

---

La rédaction, l'argumentation et la présentation matérielle entrent dans une part significative de la notation; vous devrez aussi respecter la terminologie et les règles d'usage en vigueur. Les exercices, problèmes sont indépendants. Les résultats numériques seront encadrés et simplifiés. Si vous êtes amené à repérer ce qui peut vous sembler une erreur d'énoncé, vous êtes prié de le signaler sur votre copie et devrez poursuivre votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous prendriez.

Calculatrices autorisées.

Le premier exercice est OBLIGATOIRE. Toute réponse mitigée à cet exercice influera sur le jugement général de votre copie.

Deux options s'offrent à vous :

Option A : Vous traitez les exercices 1,2,3,4 .

Option B : Vous traitez les exercices 1,2,4,5 .

**Exercice 1** (Cours ou presque)

a) Donner un exemple de matrice de  $M_2(\mathbb{R})$  non diagonalisable sur  $\mathbb{R}$ .

b) On se donne  $E$  un  $\mathbb{K}$  espace vectoriel,  $f \in L(E)$  et  $x$  un vecteur non nul de  $E$ .  
Etablir que  $Vect(x)$  est stable par  $f$  si et seulement si  $x$  est vecteur propre de  $f$ .

c) Soit  $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ .

i) Déterminer son polynôme caractéristique.

ii)  $A$  est-elle trigonalisable?

iii) Préciser le spectre de  $A$ .  $A$  est-elle diagonalisable? ( Justifier votre réponse !)

iv) Donner la dimension de l'espace propre de  $A$  associé à la valeur propre -1.

d) Pour  $x > 0$ , on pose  $f(x) = \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}$ .

i) Donner le développement d'ordre 1 en 0 de  $g : x \rightarrow e^{-x} - e^{-2x}$ .

ii) Vérifier que, pour  $x \geq 1$ ,  $f(x) \leq e^{-x}$ .

iii) Nature de  $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ ?

e) On rappelle que  $j = \exp(\frac{2i\pi}{3})$  et on pose  $f(x) = \exp(jx)$ , ce pour  $x \geq 0$ .

i)  $\int_0^{+\infty} f(x)dx$  converge-t-elle? Si oui, quelle est sa valeur?

ii)  $\int_0^{+\infty} f(x)dx$  est-elle absolument convergente? Si oui, que vaut  $\int_0^{+\infty} |f(x)|dx$ .

**Solution :** a)  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  est l'exemple classique maintes fois donné ■

b) Voir cours ■

c)i) Par développement suivant la seconde colonne, on trouve  $\chi_A = (X + 1)^3$ .

ii) Le polynôme caractéristique de  $A$  étant scindé sur  $\mathbb{R}$ ,  $A$  est bien trigonalisable.

iii) Le spectre de  $A$  étant fait des racines réelles de  $\chi_A$ ,  $Sp(A) = \{-1\}$ ; si  $A$  était dz, elle serait donc semblable à  $-I_3$  soit égale à  $-I_3$ ; ce qui n'est pas. Ainsi  $A$  n'est pas dz.

iv) Pour cela on regarde le rang de  $A + I_3$  qui vaut ( c'est immédiat) 1. Donc ( par la formule du rang)la dimension de  $E_{-1}(A) = 3 - 1 = 2$ ■

d)i)  $g(x) = 1 - x - (1 - 2x) + o(x) = x + o(x)$  pour  $x \rightarrow 0$ .

ii) Immédiat.

iii)  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$  et positive ( donc CV = ACV ).

Nature de  $\int_0^1 f(x)dx$  ? : Comme par i)  $f(x)x \rightarrow 0 \rightarrow 1$ , fausse singularité en 0 donc notre première IG converge.

Nature de  $\int_1^\infty f(x)dx$  ? : Avec ii)  $0 \leq f(x) \leq e^{-x}$ , pour  $x \geq 1$  et  $\int_1^\infty e^{-x}dx$  est (A)CV donc, par comparaison, il en va de même pour notre deuxième IG.

Conclusion : par les deux points précédents,  $\int_0^{+\infty} f(x)dx$  converge ■

e)i) D'après votre cours, il y a convergence car  $\Re(j) = -1/2 < 0$  et la valeur de cette IG est  $\frac{1}{-j} = \overline{-j}$ .

ii) Pour tout  $x \geq 0$ ,  $|f(x)| = e^{-x/2}$ , en vertu du critère de convergence des intégrales d'exponentielles, il y a bien convergence absolue et la valeur de la dernière IG est 2 ■

### Exercice 2 (Analyse)

Soient  $0 < a < b$ , on considère les deux suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  définies par :

$$\begin{cases} a_0 = a \\ b_0 = b \\ \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \\ \text{et} \\ b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \end{cases}$$

1) Montrer que, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ ,  $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$ .

2) Prouver alors que  $a_n \leq b_n$  pour tout  $n$ .

3) Vérifier alors que les suites  $(a_n)$ ,  $(b_n)$  sont respectivement croissante et décroissante.

4) Que peut-on en conclure?

On désigne par  $M(a, b)$  la limite commune à ces deux suites; on ne cherchera pas à déterminer cette limite.

5) Donner une valeur approchée à  $10^{-2}$  près de  $M(1, 2)$ ; on justifiera son résultat.

Pour tout réel  $t$ , on pose  $\theta(t) = \frac{1}{\sqrt{(t^2 + a^2)(t^2 + b^2)}}$ .

6) Etablir que les intégrales généralisées  $\int_0^\infty \theta(t)dt$  et  $\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t)dt$  convergent. On note  $I(a, b)$  et  $J(a, b)$  leurs valeurs respectives.

Prouver que  $J(a, b) = 2I(a, b)$ .

Pour  $s > 0$ , on pose  $\phi(s) = \frac{1}{2}(s - \frac{ab}{s})$ .

7) Confirmer que  $\phi$  est un changement de variable légitime de  $\mathbb{R}_+^*$  sur  $\mathbb{R}$ .

8) En déduire que  $I(a, b) = \frac{1}{2}J(\sqrt{ab}, \frac{a+b}{2})$ .

( Quelques calculs à surmonter....)

9) Montrer que, pour tout  $n$ ,  $I(a_n, b_n) = I(a, b)$ .

10) A l'aide de la question 3), trouver un encadrement de  $I(a_n, b_n)$  par deux intégrales généralisées convergentes dont vous donnerez la valeur en fonction de  $a_n, b_n$ .

11) Prouver enfin que  $I(a, b) = \frac{\pi}{2M(a, b)}$ .

### Solution :

1)  $\frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = \frac{1}{2}(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$ , ce pour  $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$  ■

- 2) Pour tout  $n \geq 0$  :  $b_{n+1} - a_{n+1} \geq 0$  par 1) et  $b_0 - a_0 > 0$  par hypothèse donc  $a_n \leq b_n$  pour tout  $n$  ■
- 3) Fixons  $n$  :  $a_{n+1} - a_n = \sqrt{a_n b_n} - a_n \stackrel{2)}{\geq} \sqrt{a_n a_n} - a_n = 0$ ;  $b_{n+1} - b_n = \frac{a_n - b_n}{2} \stackrel{2)}{\leq} 0$  ■
- 4) Pour tout  $n$  :  $a_n \leq b_n \leq b_0 = b$  par 2) et  $\searrow$  de  $(b_n)$  et de même  $a \leq b_n$ . Il en résulte que les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont respectivement majorée et minorée donc convergentes. En notant  $l$  et  $L$  leur limite respective, on obtient par passage à la limite dans l'égalité  $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$  :  $L = \frac{l + L}{2}$  soit  $l = L$ . Les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont donc **adjacentes** ■
- 5)  $\theta$  est continue, positive, paire et en  $+\infty$  :  $\theta(t) \sim \frac{1}{t^2}$  donc les intégrales généralisées convergent et la parité de  $\theta$  montre que  $J(a, b) = 2I(a, b)$  ■
- 6)  $\phi$  est évidemment de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ , de dérivée ( au point  $s > 0$ )  $\frac{1}{2}(1 + \frac{ab}{s^2}) > 0$ ; ainsi  $\phi$  strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+^*$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}_+^*$  sur son image  $= ] \lim_{s \rightarrow 0^+} \phi(s); \lim_{s \rightarrow +\infty} \phi(s)[ = \mathbb{R}$ . Ceci répond à la question ■
- 7) On pose dans  $J(\sqrt{ab}, \frac{a+b}{2})$  :  $t = \phi(s)$  donc :
- $$J(\sqrt{ab}, \frac{a+b}{2}) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{1 + \frac{ab}{s^2}}{\frac{1}{4} (s^2 - 2ab + \frac{a^2 b^2}{s^2} + 4ab)^{1/2} (s^2 - 2ab + \frac{a^2 b^2}{s^2} + (a+b)^2)^{1/2}}$$
- $$= 2 \int_0^\infty \frac{1 + \frac{ab}{s^2}}{(s^2 (1 + \frac{ab}{s^2})^2)^{1/2} ((s^2 + a^2)(s^2 + b^2)s^{-2})^{1/2}} = 2I(a, b) \blacksquare$$
- 8) La relation précédente spécialisée en  $a = a_n, b = b_n$  prouve que  $I(a_n, b_n) = I(a_{n+1}, b_{n+1})$ , ce pour tout  $n$ . Donc la suite  $(I(a_n, b_n))$  est constante i.e  $\forall n, I(a_n, b_n) = I(a_0, b_0) = I(a, b)$  ■
- 9) On a pour tout  $n$  :  $a_n \leq b_n$  donc pour tout  $t \geq 0$ ,  $\frac{1}{\sqrt{(t^2 + a_n^2)(t^2 + a_n^2)}} \leq \frac{1}{\sqrt{(t^2 + a_n^2)(t^2 + b_n^2)}} \leq \frac{1}{\sqrt{(t^2 + b_n^2)(t^2 + b_n^2)}}$ ; la croissance de l'intégrale généralisée ( les intégrales manipulées convergent) donne  $\int_0^\infty \frac{dt}{t^2 + a_n^2} \leq I(a_n, b_n) \leq \int_0^\infty \frac{dt}{t^2 + b_n^2}$ . Comme une primitive de  $t \rightarrow \frac{1}{t^2 + c^2}$  est  $\rightarrow \frac{1}{c} \arctan \frac{t}{c}$ , il vient, après calcul :  $\frac{\pi}{2a_n} \leq I(a_n, b_n) = I(a, b) \leq \frac{\pi}{2b_n}$  ■
- 10) La question précédente et le théorème des gendarmes donne le résultat ■

**Exercice 3** (Méthode de Bernoulli : INP)

Soient  $P = X^3 - 6X^2 + 3X + 1$  et  $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ .

- 1)a) Etablir que  $P$  est le polynôme caractéristique de  $A$ . ( On ne finassera pas trop dans le calcul de celui-ci)
- b) A l'aide des évaluations en  $-1, 0$  et  $1$  de  $P$ , prouver que  $P$  possède trois racines réelles. Qu'en déduire pour  $A$ ?
- On note  $\alpha < \beta < \gamma$  les valeurs propres de  $A$ .
- c) Préciser la partie entière de  $\gamma$ .

On pose, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = \text{tr}(A^n)$ .

- 2)a) Calculer  $u_k$  pour  $0 \leq k \leq 2$ .
- b) A l'aide du théorème de Cayley-Hamilton, vérifier que  $u_{n+3} - 6u_{n+2} + 3u_{n+1} + u_n = 0$  pour tout entier naturel  $n$ .
- c) Prouver que :  $\forall n \geq 0, u_{n+2} > u_{n+1} > u_n > 0$ .

On pose enfin :  $D = \text{diag}(\alpha, \beta, \gamma)$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ .

- 3)a) Etablir que  $A^n$  et  $D^n$  sont semblables pour tout entier naturel  $n$ .
- b) En déduire, pour tout entier naturel  $n$ , une expression de  $u_n$  en fonction de  $n$  et  $\alpha, \beta, \gamma$ .
- c) Démontrer que la suite  $(v_n)$  converge vers  $\gamma$ .
- d) Indiquer brièvement comment utiliser ce résultat pour " déterminer " le spectre de  $A$ .

**Solution :**

- 1)a) Ceci s'obtient par simple développement suivant la dernière ligne par exemple.
- b) On a  $P(-1) < 0, P(0) > 0$  et  $P(1) < 0$  donc, par tvi,  $P$  possède une racine dans l'intervalle  $] -1, 0[$  et

une autre dans  $]0, 1[$ . Par ailleurs puisque  $P(x) \rightarrow +\infty$  en  $+\infty$ ,  $P$  possède nécessairement une troisième racine.

$P$  étant scindé sur  $\mathbb{R}$  et à racines simples,  $A$  est diagonalisable ■

b) On peut observer que  $P(5) < 0$  alors que  $P(6) > 0$  ce qui localise  $\gamma$  dans l'intervalle  $]5, 6[$  donc la partie entière de  $\gamma$  est égale à 5 ■

2)a) Immédiatement  $u_0 = 3$ ,  $u_1 = 6$  et, avec le calcul des coefficients diagonaux de  $A^2$  (33, -3, 0), nous obtenons  $u_2 = 30$  ■

b) Le théorème de Cayley-Hamilton donne  $A^3 - 6A^2 + 3A + I_3 = 0_3$  donc, en multipliant chaque membre de cette égalité par  $A^n$ , puis en prenant la trace de chaque membre de cette nouvelle égalité, il vient ( en utilisant bien sûr la linéarité de la trace):  $tr(A^{n+3}) - 6tr(A^{n+2}) + 3tr(A^{n+1}) + tr(A^n) = tr(0_3) = 0$  d'où la relation voulue ■

c) On émet, pour tout  $n$ , l'hypothèse de récurrence  $(H_n) : u_{n+2} > u_{n+1} > u_n > 0$  qui est validée au rang 0 par 2)a) et on suppose qu'elle est vraie au rang  $n$ . Pour vérifier que cette propriété est héréditaire, il suffit ( sous l'égide de  $H_n$  ) de montrer que  $u_{n+3} > u_{n+2}$ .

Or  $u_{n+3} - u_{n+2} = 6u_{n+2} - 3u_{n+1} - u_n - u_{n+2}$  ( avec 2)b)) donc

$u_{n+3} - u_{n+2} = 3(u_{n+2} - u_{n+1}) + (u_{n+2} - u_n) + u_{n+2} > 0$ , ce grâce à  $(H_n)$ . La récurrence se poursuit bien ■

3)a) Il existe donc  $Q$  une matrice inversible d'ordre 3 telle que  $A = PDP^{-1}$ ; ceci implique, on le sait, que  $A^n = PD^nP^{-1}$ . Ainsi  $A^n$  et  $D^n$  sont semblables pour tout entier naturel  $n$ , ce pour tout  $n$  ■

b) La trace étant un invariant de similitude, nous avons, pour tout  $n$ ,  $tr(A^n) = tr(D^n)$  soit :

$$u_n = \alpha^n + \beta^n + \gamma^n \blacksquare$$

c) La question 2)c) justifie le bien fondé de la définition de la suite  $(v_n)$ .

On observe ensuite que  $u_n = \gamma^n(1 + \frac{\alpha^n + \beta^n}{\gamma^n})$ , ce pour tout  $n$ .

Puis  $|\frac{\alpha^n + \beta^n}{\gamma^n}| \leq \frac{2}{5^n}$ , ce ( cf 1)) parce que  $-1 < \alpha < 0$ ,  $0 < \beta < 1$  et  $5 < \gamma$ , dans le même contexte.

Ainsi  $u_n \sim \gamma^n$  puisque  $1 + \frac{\alpha^n + \beta^n}{\gamma^n} \rightarrow 1$ .

Donc ( quotient d'équivalents)  $v_n \sim \frac{\gamma^{n+1}}{\gamma^n} = \gamma$ . Autrement dit  $v_n \rightarrow \gamma$  ■

d) On obtient une valeur approché de  $\gamma$  avec une valeur de  $v_n$  appropriée que nous notons  $c$ . Dès lors on va chercher des valeurs approchées des deux autres valeurs propres, nous noterons  $a$  et  $b$  ces valeurs approchées en exploitant les informations suivantes  $a + b + c = tr(A) = 6$  et  $abc = det(A) = -1$ . Comme on connaît  $c$ , il suffit de résoudre une équation du second degré pour trouver les valeurs manquantes ■

#### Exercice 4 (Commutant d'une matrice nilpotente d'indice $n$ : Centrale)

On se donne  $N$  une matrice nilpotente de  $M_n(\mathbb{C})$  d'indice de nilpotence  $n$ .

Ainsi  $N^n = 0_n$  et  $N^{n-1} \neq 0_n$ . On note  $f$  l'endomorphisme canoniquement associé à  $N$ .

1) Soit  $x_0 \in \mathbb{C}^n$  tel que  $f^{n-1}(x_0) \neq 0_{\mathbb{C}^n}$ , établir que  $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$  est une base, notée  $b$ , de  $\mathbb{C}^n$ .

2) Ecrire  $S$  la matrice de  $f$  dans la base  $b$ .

3) Prouver que  $Ker(f^k) = Vect(f^{n-k}(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$  pour  $1 \leq k \leq n$ .

On considère  $g \in L(\mathbb{C}^n)$  tel que  $gof = gof$

4) Montrer qu' alors  $g(x_0)$  caractérise  $g$ .

En déduire la forme de  $V$  la matrice de  $g$  dans la base  $b$ .

5) Quelle est la dimension du commutant de  $N$  ( sev de  $M_n(\mathbb{C})$  fait des matrices qui commutent avec  $N$ )?

**Solution :**

1) Le cardinal de  $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$  valant  $n = \dim \mathbb{C}^n$ , il suffit de montrer que cette famille est

libre. On se donne  $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$  tel que  $\sum_{i=0}^{n-1} a_i f^i(x_0) = 0_{\mathbb{C}^n}$ . Supposons que  $(a_0, \dots, a_{n-1})$  soit dif-

férent de  $0_{\mathbb{C}^n}$  et notons  $j = \min\{i, a_i \neq 0\}$  alors  $\sum_{i=0}^{n-1} a_i f^i(x_0) = 0_{\mathbb{C}^n}$  s'écrit aussi  $\sum_{i=j}^{n-1} a_i f^i(x_0) = 0_{\mathbb{C}^n}$  et ainsi

$f^{n-1-j} \left( \sum_{i=j}^{n-1} a_i f^i(x_0) \right) = 0_{\mathbb{C}^n}$  ou, par linéarité,  $\sum_{i=j}^{n-1} a_i f^{i-j+n-1}(x_0) = 0_{\mathbb{C}^n}$ . Par hypothèse  $f^{i-j+n-1}(x_0) = 0_{\mathbb{C}^n}$  si  $i > j$  donc  $\sum_{i=j}^{n-1} a_i f^{i-j+n-1}(x_0) = 0_{\mathbb{C}^n} \iff a_j f^{n-1}(x_0) = 0_{\mathbb{C}^n}$  soit  $a_j = 0$  puisque  $f^{n-1}(x_0) \neq 0_{\mathbb{C}^n}$ ; cela rentre en conflit avec la définition de  $j$  et notre supposition initiale ne tenant pas, la famille est libre comme espéré ■

2) Il vient sans difficulté que :  $S = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & \ddots & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$  ■

3) On écrit  $x \in \mathbb{C}^n$  dans la base  $b$  :  $x = \sum_{i=0}^{n-1} y_i f^i(x_0)$ . Puis  $x \in \text{Ker}(f^k)$  équivaut à  $\sum_{i=0}^{n-1} y_i f^{i+k}(x_0) = 0_{\mathbb{C}^n}$

donc  $x \in \text{Ker}(f^k) \iff \sum_{i=0}^{n-1-k} y_i f^{i+k}(x_0) = 0_{\mathbb{C}^n}$ .

La liberté de  $b$  nous assure que cette dernière condition signifie aussi :  $y_i = 0$ , pour tout  $i \in \llbracket 0, n-1-k \rrbracket$  autrement dit  $x \in \text{Vect}(f^{n-k}(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$  ■

4) Posons  $g(x_0) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i f^i(x_0)$  donc  $g(f^j(x_0)) \stackrel{\text{f,g commutent}}{=} f^j(g(x_0)) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i f^{i+j}(x_0) = a_0 f^j(x_0) +$

$\dots a_{n-1-j} f^{n-1}(x_0)$ ; ce qui prouve la caractérisation souhaitée et donne  $V = \begin{pmatrix} a_0 & & & & \\ a_1 & a_0 & & & (0) \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \\ a_{n-2} & \ddots & \ddots & a_0 & \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$

■  
5) Un calcul à faire mais indolore montre que les matrices du type précédent commutent avec  $S$  donc constitue le commutant de  $S$ .

Posons alors  $J_0 = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 0 & 1 & & & (0) \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & \ddots & \ddots & 1 & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$  et de façon plus générale  $J_k$  la matrice carrée de taille  $n$  dont

tous les coefficients sont nuls sauf ceux situés sur la  $k$ -ième sous diagonale qui eux sont tous égaux à 1, ce pour  $1 \leq k \leq n-1$ ; la famille  $(J_0, \dots, J_{n-1})$  est clairement libre et engendre le commutant de  $S$ ; celui-ci est donc de dimension  $n$  ■

### Exercice 5 (X, ENS, Mines)

Les trois parties de l'exercices traitent du même thème mais les deux premières sont totalement disjointes.

#### Partie I

1) On se donne  $f \in C_M(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  admettant une limite finie  $L > 0$  en  $+\infty$ .

Démontrer que  $\int_0^\infty f(t) dt$  diverge.

2) En déduire le plus succinctement possible que si  $g$  est un élément de  $C_M(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  qui possède une limite finie en  $+\infty$  et si  $\int_0^\infty g(t) dt$  converge alors  $g(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ .

#### Partie II

On considère  $k > 0$  et  $f$   $k$ -lipschitzienne sur  $\mathbb{R}_+$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Cela signifie en particulier que :  $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$ .

1) On suppose dans cette question que  $g$  est un élément de  $C_M(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  tel que  $\int_0^\infty g(t)dt$  converge.

a) Démontrer que  $\int_x^\infty g(t)dt \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$ .

b) En déduire que :  $\forall \epsilon > 0, \exists A > 0, \forall y \geq x \geq A, |\int_x^y g(t)dt| \leq \epsilon$ .

2) Dans cette question on suppose que  $\int_0^\infty f(t)dt$  converge et on veut démontrer par l'absurde que :

$$f(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0.$$

On suppose donc que ce n'est pas le cas; par traduction séquentielle on se ramène alors à la situation suivante ( on ne demande pas de le vérifier).

On dispose d'une suite  $(x_n)$  strictement croissante, divergeant vers  $\infty$  et d'un réel  $\delta > 0$  tels que :

$$\forall n, f(x_n) \geq \delta.$$

a) Vérifier que :  $\forall n, \forall t \in [x_n, x_n + \frac{\delta}{2k}], f(t) \geq \frac{\delta}{2}$ .

b) Aboutir à une contradiction en utilisant la question 1). Conclure.

### Partie III

Soit  $h$  de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}_+$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$  telle que  $\int_0^\infty h(t)dt$  converge et  $\int_0^\infty h''(t)dt$  converge absolument.

1) Démontrer que  $h'$  possède une limite finie en  $+\infty$ .

2) En s'aidant d'un dessin, en déduire que  $h'$  est bornée sur  $\mathbb{R}_+$ .

3) Grâce à l'inégalité des accroissements finis, établir que  $h$  est alors lipschitzienne.

4) Prouver que  $h$  et  $h'$  admettent une limite nulle en  $+\infty$ .

#### Solution :

Partie I

1)  $f$  est donc positive pour  $t$  assez grand et  $\int_0^\infty 1dt$  diverge donc, il en va de même pour  $\int_0^\infty f(t)dt$  diverge ■

2) La question précédente montre que si cette limite est  $> 0$ , il y a contradiction.

Si cette limite est  $< 0$ , en passant à la fonction opposée, on est ramené au premier cas; donc contradiction aussi.

Par élimination, la seule limite viable est 0 ■

Partie II

1)a) C'est du cours.

b) Traduction epsilonesque du 1)a) : il existe bien  $A > 0$  tel que  $\forall x \geq A, |\int_x^\infty g(t)dt| \leq \epsilon/2$ .

Par inégalité triangulaire et pour  $x \geq A$  et  $y \geq A$ , il vient donc :  $|\int_x^\infty g(t)dt - \int_y^\infty g(t)dt| \leq |\int_x^y g(t)dt| + |\int_y^\infty g(t)dt| \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$ . Chasles permet de conclure ■

2)a) Fixons un entier naturel  $n$  et  $t \in [x_n, x_n + \frac{\delta}{2k}]$ , alors de  $|f(t) - f(x_n)| \leq k|t - x_n|$  on tire :

$$f(t) - f(x_n) \geq -k(t - x_n) \geq -k \frac{\delta}{2k} \text{ soit } f(t) \geq f(x_n) - \frac{\delta}{2} \geq \frac{\delta}{2} \blacksquare$$

b) Dès lors, par 2)a) et croissance de l'intégrale, pour tout entier  $n$  :  $\int_{x_n}^{x_n + \frac{\delta}{2k}} f(t)dt \geq (\frac{\delta}{2})(\frac{\delta}{2k}) = \frac{\delta^2}{4k}$ .

En prenant  $\epsilon < \frac{\delta^2}{4k}$ , on aboutit à une contradiction, ce en utilisant 1)b).

Il en résulte que  $f(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$  ■

Partie III

1) La convergence absolue de  $\int_0^\infty h''(t)dt$  entraîne sa convergence donc, par théorème fondamental de l'analyse généralisée que  $h'$  possède une limite finie en  $+\infty$  ■

2) Le fait précédent prouve que  $h'$  est bornée sur un intervalle du type  $[A, +\infty[$ , où  $A > 0$ . Le théorème des bornes atteintes ( ou de Weierstrass) lui dit que  $h'$ , continue sur  $[0, A]$ , y est bornée. Ainsi  $h'$  est bornée sur  $\mathbb{R}_+$  ■

3) Il existe donc un réel positif  $M$  tel que :  $\forall x \geq 0, |h'(x)| \leq M$  d'après la question précédente.

L'inégalité des accroissements finis donne alors :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2, |h(x) - h(y)| \leq M|x - y| \blacksquare$$

4) La partie II prouve donc ( avec 3)) que  $h$  admet bien une limite nulle en  $+\infty$ .

Quitte à passer à l'opposée, on peut supposer que la limite, notée  $L$ , de  $h'$  en  $+\infty$  est positive.

Supposons  $L > 0$  alors, toujours par l'inégalité des accroissements finis, nous avons, pour  $x, y$  assez grands

$|h(x) - h(y)| \geq \frac{L}{2}|x - y|$ ; ce qui, en fixant  $y$  et en faisant tendre  $x$  vers  $+\infty$ , on entre en conflit avec le fait que  $h$  tende vers 0 en  $+\infty$  donc  $L = 0$  ■

FIN