Feuille d'exercices 9
ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

1 - ÉQUATIONS DU PREMIER ORDRE

Exercice 1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

(a) $y' + 3y = t^2 e^{-t}$,

(b) $y' + y = \cos(t) + \sin(t)$ avec $y(0) = -1$,

(c) $y' - \dfrac{3t}{t^2+1} y = \sqrt{t^2+1} - t + \dfrac{2t}{t^2+1}$,

(d) $(1+t^2)y' + ty = t^3$,

(e) $(1+e^{-t})y' - y = 1$ avec $y(0) = 3$,

(f) $y' - y = \dfrac{1}{1+e^{2t}}$ avec $y(0) = \dfrac{\pi}{4}$.

Exercice 2. Résoudre les équations suivantes, en précisant le domaine de définition :

(a) $ty' - y = t^2 \sin t$,

(b) $(1-t^2)y' + 2ty = t$ avec $y(0) = 0$,

(c) $t(t-2)y' - 2y = (t-1)(t-3)$,

(d) $2t(\sqrt{t}+1)y' - (2\sqrt{t}+1)y = 0$.

Exercice 3. Déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x)f(y).$$

Exercice 4. Déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ f(xy) = f(x) + f(y).$$

Exercice 5. Montrer qu'il existe une unique fonction $y : \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ telle que $y(0) = 1$ et

$$y'(t) = \frac{y(t)}{\cos t}.$$

La déterminer en posant $x = \sin(t)$.

2 - ÉQUATIONS DU SECOND ORDRE

Exercice 6. Résoudre les équations suivantes :

(a) $y'' + 2y' + 4y = 0$,

(b) $y'' - 2y' - 3y = e^{-t} \cos t$,

(c) $y'' - 6y' + 8y = 16t^2$,

(d) $y'' - 2y' + y = \cos(2t)$ avec $y(0) = y'(0) = 0$,

(e) $y'' - y' + (1+i)y = 0$,

(f) $y'' + y = 2\mathrm{sh}\,(t)$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 2$,

(g) $y'' - 3y' + 2y = 2x^3 - 7x^2 + 2x - 1$,

(h) $y'' - 2y' + 2y = xe^x$ avec $y(0) = 1$.

Exercice 7. Résoudre l'équation $y'' + y = |t| + 1$.

Exercice 8. Déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(-x).$$

Exercice 9. En posant $t = \ln(x)$, résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation

$$x^2 y'' + 3y + 1 = (x+1)^2.$$

Exercice 10. En posant $x = \sin(t)$, résoudre sur $]-1, 1[$ l'équation

$$(1 - x^2)y'' - xy' + y = 0.$$

Exercice 11. Soit a dans $\mathbb{R}$. On considère y dans $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ y'(t) = e^{at} y(-t).$$

(a) Montrer que y est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.
(b) Montrer que y vérifie une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.
(c) En déduire les solutions du problème de départ.

3 - Pour aller plus loin

Exercice 12. Résoudre les systèmes suivants :

(a) $\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & y + t^2 \\ y' & = & x - t^2 \end{array} \right.$, (b) $\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & -7x + y + 1 \\ y' & = & -2x - 5y \end{array} \right.$, (c) $\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & 2tx - y + t\cos(t) \\ y' & = & x + 2ty + t\sin(t) \end{array} \right.$.

Exercice 13. Résoudre l'équation différentielle

$$y''' - 2y'' - 4y' + 8y = 0,$$

munie des conditions initiales $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$ et $y''(0) = 8$.

Exercice 14. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle

$$ty'' - 2y' - ty = 0,$$

en se ramenant à une équation différentielle du $4^{\text{ème}}$ ordre à coefficients constants.

Exercice 15. On considère l'équation :

$$y' + ay + by^2 = c,$$

où a, b et c sont continues sur $\mathbb{R}$.

(a) Dans le cas où $c = 0$, se ramener à une équation linéaire en posant $z = \dfrac{1}{y}$.
(b) Dans le cas général, montrer que si y_0 est une solution particulière, alors on peut se ramener au premier cas en posant $w = y - y_0$.
(c) *Application :* Résoudre $x^2(y' + y^2) = xy - 1$, en vérifiant d'abord que $y_0 : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est une solution.