Devoir à la maison n° 5

Exercice 1.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note F_n la primitive s'annulant en 0 de la fonction $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{(1+x^2)^n}$.

1. Que vaut F_1 ?
2. En effectuant le changement de variables $x = \tan t$, calculer F_2.
3. À l'aide d'une intégration par parties, déterminer une relation entre F_n et F_{n+1}.
4. En déduire F_3.

Exercice 2. On considère l'équation différentielle d'inconnue $y : I \to \mathbb{R}$:

$$(E)\ :\ xy' = x + y.$$

1. Déterminer les deux intervalles d'étude I_1 et I_2 de (E).
2. Résoudre l'équation (E) sur chacun de ces intervalles.
3. Montrer que si y est solution de (E) sur $\mathbb{R}$, alors $y(0) = 0$.
4. Soient y_1 et y_2 des solutions de (E) sur I_1 et I_2 respectivement.
   Montrer que la fonction $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = \begin{cases} y_1(x) & \text{si} \quad x \in I_1 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ y_2(x) & \text{si} \quad x \in I_2 \end{cases}$$

   est continue. Est-elle dérivable ? Conclure.