Corrigé partiel du T. D. A5
Primitives

1 Calculer une primitive de chacune des fonctions suivantes.

$$f_2(x) = \frac{1}{x^2 - 2x - 1} \qquad f_4(x) = \frac{x}{4x^2 + 4x + 1}$$
$$f_6(x) = \frac{9}{x^2 - 9x} \qquad f_8(x) = \frac{1}{1 - 3x + \frac{9}{2}x^2}$$

• Pour intégrer f_2 on décompose en éléments simples :

$$f_2(x) = \frac{1}{(x - 1 - \sqrt{2})(x - 1 + \sqrt{2})} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\frac{1}{x - 1 - \sqrt{2}} - \frac{1}{x - 1 + \sqrt{2}}\right]$$

Donc une primitive de f_2 est :

$$\boxed{F_2(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{x - 1 - \sqrt{2}}{x - 1 + \sqrt{2}}\right|}$$

• Pour intégrer f_4 on fait apparaître la dérivée du dénominateur :

$$f_4(x) = \frac{x}{(2x+1)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2x+1}{(2x+1)^2} - \frac{1}{(2x+1)^2}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{2}{2x+1} - \frac{2}{(2x+1)^2}\right)$$

On en déduit une primitive de f_4 :

$$\boxed{F_4(x) = \frac{1}{4}\left[\ln|2x+1| + \frac{1}{2x+1}\right]}$$

• Pour intégrer f_6 on décompose en éléments simples :

$$f_6(x) = \frac{9}{x(x-9)} = \frac{1}{x-9} - \frac{1}{x}$$

Donc une primitive de f_6 est :

$$\boxed{F_6(x) = \ln|x - 9| - \ln|x| = \ln\left|1 - \frac{9}{x}\right|}$$

• Pour intégrer f_8 on écrit la forme canonique du dénominateur :

$$f_8(x) = \frac{2}{9}\,\frac{1}{x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{2}{9}} = \frac{2}{9}\,\frac{1}{\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{9}} = \frac{2}{3}\,\frac{3}{(3x-1)^2 + 1}$$

On reconnaît une forme $\frac{u'}{u^2+1}$, donc une primitive de f_8 est :

$$\boxed{F_8(x) = \frac{2}{3}\arctan(3x-1)}$$

5 Calculer les intégrales suivantes.

$I_3 = \displaystyle\int_0^2 \frac{2t-1}{(t+1)^2}\,\mathrm{d}t$ $\qquad I_5 = \displaystyle\int_4^8 \frac{4\mathrm{d}t}{t^2-4t+3}$ $\qquad I_6 = \displaystyle\int_a^{2a} \frac{\mathrm{d}t}{t(t+a)}\quad (a \neq 0)$

$I_{10} = \displaystyle\int_{-1}^0 \frac{t\,\mathrm{d}t}{t^4-4}$ $\qquad I_{13} = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} t(2t-1)^8\,\mathrm{d}t$ $\qquad I_{14} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^4 t\,\mathrm{d}t$

$I_{15} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\tan t)^2\,\mathrm{d}t$ $\qquad I_{16} = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sin^2 t\cos^2 t\,\mathrm{d}t$ $\qquad I_{17} = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin t\,\mathrm{d}t}{3+\sin^2 t}$

$I_{18} = \displaystyle\int_0^x t^3 e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$ $\qquad I_{19} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{2t}\cos 3t\,\mathrm{d}t$ $\qquad I_{21} = \displaystyle\int_{-2}^2 t\,\mathrm{sh}\,t\,\mathrm{d}t$

$I_{22} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 3t\cos 2t\,\mathrm{d}t$ $\qquad I_{23} = \displaystyle\int_0^{\ln 2} \mathrm{ch}\,t\,\mathrm{sh}\,2t\,\mathrm{d}t$ $\qquad I_{25} = \displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \arccos t\,\mathrm{d}t$

$I_{26} = \displaystyle\int_0^A t^2 e^{-t}\,\mathrm{d}t$ $\qquad I_{27} = \displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{\mathrm{d}t}{1+e^t}$ $\qquad I_{29} = \displaystyle\int_{\ln 2}^{2\ln 2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{e^t-1}}$

$I_{30} = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\mathrm{d}t}{\cos t}$ $\qquad I_{31} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{t\,\mathrm{d}t}{\cos^2 t}$ $\qquad I_{32} = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{t\,\mathrm{d}t}{\cos t}$

$I_{34} = \displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{\mathrm{d}t}{e^t - 2 - 3e^{-t}}$ $\qquad I_{35} = \displaystyle\int_1^e \frac{\ln^n t\,\mathrm{d}t}{t}$ $\qquad I_{36} = \displaystyle\int_0^2 \sqrt{t^2+1}\,\mathrm{d}t$

• Pour le calcul de I_3 on peut appliquer le changement de variable $x = t+1$, ou alors directement :

$$I_3 = \int_0^2 \frac{2t-1}{(t+1)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^2 \frac{2(t+1)-3}{(t+1)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^2 \frac{2}{t+1} - \frac{3}{(t+1)^2}\,\mathrm{d}t$$
$$= \left[2\ln|t+1| + \frac{3}{t+1}\right]_0^2 = \boxed{2\ln 3 - 2}$$

• Pour le calcul de I_5 on décompose la fonction rationnelle en éléments simples :

$$\frac{4}{t^2-4t+3} = \frac{2}{t-3} - \frac{2}{t-1}$$

Ceci permet de calculer :

$$I_5 = \int_4^8 \frac{4\mathrm{d}t}{t^2-4t+3} = \int_4^8 \frac{2}{t-3} - \frac{2}{t-1}\,\mathrm{d}t = \Big[2\ln|t-3| - 2\ln|t-1|\Big]_4^8 = \boxed{2\ln\frac{15}{7}}$$

• Pour le calcul de I_6 on décompose en éléments simples :

$$\frac{1}{t(t+a)} = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+a}\right)$$

Ceci donne

$$I_6 = \int_a^{2a} \frac{\mathrm{d}t}{t(t+a)} = \frac{1}{a}\int_a^{2a}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+a}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\Big[\ln|t| - \ln|t+a|\Big]_a^{2a} = \boxed{\frac{1}{a}\ln\frac{4}{3}}$$

• Pour le calcul de I_{10} on applique le changement de variable $x = t^2$.
La fonction $t \mapsto t^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[-1, 0]$, de dérivée $t \mapsto 2t$. Ceci donne $\frac{dx}{\mathrm{d}t} = 2t$ puis $2t\mathrm{d}t = dx$. Par changement de variable :

$$I_{10} = \int_{-1}^0 \frac{t\,\mathrm{d}t}{t^4-4} = \int_1^0 \frac{1}{2}\,\frac{dx}{x^2-4}$$

On décompose la fonction rationnelle en éléments simples :

$$\frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\right]$$

On en déduit :

$$I_{10} = \frac{1}{8}\int_1^0 \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\,dx = \frac{1}{8}\Big[\ln|x-2| - \ln|x+2|\Big]_1^0 = \boxed{\frac{\ln 3}{8}}$$

• Plusieurs méthodes sont possible pour calculer I_{13} : intégration par parties, changement de variable $x = 2t-1$, ou directement manipulation de polynômes, comme ci-dessous :

$$t(2t-1)^8 = \frac{1}{2}(2t-1+1)(2t-1)^8 = \frac{1}{2}(2t-1)^9 + \frac{1}{2}(2t-1)^8$$

On en déduit :

$$I_{13} = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{2}}\Big(2(2t-1)^9 + 2(2t-1)^8\Big)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\left[\frac{(2t-1)^{10}}{10} + \frac{(2t-1)^9}{9}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \boxed{\frac{1}{360}}$$

• Pour le calcul de I_{14} on applique le changement de variable $x = \tan t$.
La fonction $t \mapsto \tan t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, et $\frac{dx}{\mathrm{d}t} = 1 + \tan^2 t = 1 + x^2$.
On en déduit :

$$I_{14} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^4 t\,\mathrm{d}t = \int_0^1 x^4\,\frac{dx}{1+x^2}$$

Il reste à manipuler la fonction rationnelle :

$$\frac{x^4}{1+x^2} = \frac{x^4+x^2-x^2-1+1}{1+x^2} = x^2-1+\frac{1}{x^2+1}$$

On en déduit

$$I_{14} = \left[\frac{x^3}{3} - x + \arctan x\right]_0^1 = \boxed{\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}}$$

• Pour le calcul de I_{15} on fait apparaître des primitives usuelles :

$$\begin{aligned} I_{15} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\tan t)^2 \,\mathrm{d}t &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \Big(1+\tan^2 t + 2\tan t\Big)\,\mathrm{d}t \\ &= \Big[\tan t - 2\ln|\cos t|\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \boxed{1+\ln 2} \end{aligned}$$

• Pour le calcul de I_{16} on linéarise l'expression trigonométrique, en utilisant les formules de trigonométrie ou les formules d'Euler.

$$\sin^2 t \cos^2 t = \left(\frac{\sin(2t)}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\sin^2(2t) = \frac{1}{4}\,\frac{1-\cos(4t)}{2}$$

Ceci donne :

$$I_{16} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sin^2 t \cos^2 t \,\mathrm{d}t = \frac{1}{8}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (1-\cos(4t))\,\mathrm{d}t = \frac{1}{8}\left[t - \frac{\sin(4t)}{4}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} = \boxed{\frac{3\pi}{32}}$$

• Pour le calcul de I_{17} on applique le changement de variable $x = \cos t$.
La fonction $t \mapsto \cos t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[0,\pi]$, de dérivée $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\sin t$ ce qui donne $\mathrm{d}x = -\sin t\,\mathrm{d}t$, et par changement de variable :

$$I_{17} = \int_0^{\pi} \frac{\sin t\,\mathrm{d}t}{3+\sin^2 t} = \int_1^{-1} \frac{-\mathrm{d}x}{4-x^2}$$

Par décomposition en éléments simples :

$$\begin{aligned} I_{17} &= \int_{-1}^{1} \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{2+x} + \frac{1}{2-x}\Big)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4}\Big[\ln|2+x| - \ln|2-x|\Big]_{-1}^{1} = \boxed{\frac{\ln 3}{2}} \end{aligned}$$

• Pour le calcul de I_{18} il faut utiliser l'intégration par parties en posant $u'(t) = te^{-t^2/2}$ et $v(t) = t^2$. Alors $u(t) = -e^{-t^2/2}$ et $v'(t) = 2t$, les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ et donc :

$$\begin{aligned} I_{18} = \int_0^x t^3 e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t &= \Big[-t^2 e^{-t^2/2}\Big]_0^x + \int_0^x 2te^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t \\ &= -x^2e^{-x^2/2} - 2\Big[e^{-t^2/2}\Big]_0^x = \boxed{2-(2+x^2)e^{-x^2/2}} \end{aligned}$$

• Pour le calcul de I_{19} on utilise les complexes :

$$I_{19} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{2t} \cos 3t \, \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{2t} \operatorname{Re}\left(e^{3it}\right) \mathrm{d}t = \operatorname{Re}\left(\int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{(2+3i)t} \, \mathrm{d}t\right)$$

On calcule :

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{(2+3i)t} \, \mathrm{d}t = \left[\frac{e^{(2+3i)t}}{2+3i}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{2-3i}{13}\left(e^{\frac{2\pi}{3}+i\pi} - 1\right) = -\frac{2-3i}{13}\left(e^{\frac{2\pi}{3}} + 1\right)$$

La partie réelle de ce complexe est : $\boxed{I_{19} = -\frac{2(e^{\frac{2\pi}{3}} + 1)}{13}}$

• Pour le calcul de I_{21} on utilise une intégration par parties.
On pose $u(t) = t$ et $v(t) = \operatorname{ch} t$. Alors u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$, de dérivées $u'(t) = 1$ et $v'(t)$. On en déduit

$$\begin{aligned} I_{21} = \int_{-2}^{2} t \operatorname{sh} t \, \mathrm{d}t &= \Big[t \operatorname{ch} t\Big]_{-2}^{2} - \int_{-2}^{2} \operatorname{ch} t \, \mathrm{d}t \\ &= \Big[t \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t\Big]_{-2}^{2} = \boxed{4 \operatorname{ch} 2 - 2 \operatorname{sh} 2} = \boxed{e^2 + 3e^{-2}} \end{aligned}$$

• Pour le calcul de I_{22} on linéarise l'expression trigonométrique grâce aux formules d'Euler :

$$\sin 3t \cos 2t = \frac{(e^{i3t} - e^{-i3t})}{2i} \frac{(e^{i2t} + e^{-i2t})}{2} = \frac{e^{i5t} + e^{it} - e^{-it} - e^{-5it}}{4i} = \frac{1}{2}(\sin 5t + \sin t)$$

Ceci donne :

$$I_{22} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 3t \cos 2t \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 5t + \sin t \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{5}\cos 5t - \cos t\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \boxed{\frac{3}{10}}$$

• Pour le calcul de I_{23} on pourrait linéariser l'expression hyperbolique, mais on peut aussi utiliser la formule $\operatorname{sh} 2t = 2 \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t$, puis reconnaître une formule de type $u'u^2$:

$$I_{23} = \int_0^{\ln 2} \operatorname{ch} t \operatorname{sh} 2t \, \mathrm{d}t = \int_0^{\ln 2} 2 \operatorname{sh} t \operatorname{ch}^2 t \, \mathrm{d}t = \left[\frac{2}{3}\operatorname{ch}^3 t\right]_0^{\ln 2} = \boxed{\frac{61}{96}}$$

• Pour le calcul de I_{25} on intègre par parties, en posant $u(t) = t$ et $v(t) = \arccos t$. Ces deux fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, de dérivées $u'(t) = 1$ et $v'(t) = \frac{-1}{\sqrt{1-t^2}}$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} I_{25} &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (1 \times \arccos t) \, \mathrm{d}t = \Big[t \arccos t\Big]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \, \mathrm{d}t \\ &= \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{6} - \frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (-2t)(1-t^2)^{-\frac{1}{2}} \, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\Big[2\sqrt{1-t^2}\Big]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \boxed{\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

• Pour le calcul de I_{26} on utilise deux intégrations par parties successives.

On pose $u(t) = t^2$ et $v(t) = -e^{-t}$. Alors les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[0, A]$ (ou $[A, 0]$ si $A < 0$), de dérivées $u'(t) = 2t$ et $v'(t) = e^{-t}$. Par intégration par parties :

$$I_{26} = \int_0^A t^2 e^{-t}\,\mathrm{d}t = \Big[-t^2 e^{-t}\Big]_0^A + \int_0^A 2te^{-t}\,\mathrm{d}t$$

On pose alors (indépendemment du calcul précédent) $u(t) = 2t$ et $v(t) = -e^{-t}$. Alors u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$, de dérivées $u'(t) = 2$ et $v'(t) = e^{-t}$. Par intégration par parties :

$$I_{26} = \Big[-t^2 e^{-t}\Big]_0^A + \Big[-2te^{-t}\Big]_0^A + \int_0^A 2e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

Ceci donne :

$$I_{26} = \Big[-t^2 e^{-t} - 2te^{-t} - 2e^{-t}\Big]_0^A = \boxed{2 - (A^2 + 2A + 2)e^{-A}}$$

• Pour le calcul de I_{27} on utilise le changement de variable $x = e^t$, même si $x = e^{-t}$ donnerait un résultat plus simple.

La fonction $t \mapsto e^t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[\ln 2, \ln 3]$, sa dérivée est $\frac{dx}{\mathrm{d}t} = e^t = x$. Ainsi $\mathrm{d}t = \frac{dx}{x}$ et par changement de variable :

$$I_{27} = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{\mathrm{d}t}{1 + e^t} = \int_2^3 \frac{dx}{x(1 + x)}$$

On décompose la fonction rationnelle en éléments simples :

$$I_{27} = \int_2^3 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1 + x}\right) dx = \Big[\ln|x| - \ln|1 + x|\Big]_2^3 = \boxed{2\ln 3 - 3\ln 2 = \ln\frac{9}{8}}$$

• Pour le calcul de I_{29} on utilise le changement de variable $x = \sqrt{e^t - 1}$.

La fonction $t \mapsto \sqrt{e^t - 1}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[\ln 2, 2\ln 2]$, sa dérivée est $\frac{dx}{\mathrm{d}t} = \frac{e^t}{2\sqrt{e^t - 1}} = \frac{x^2+1}{2x}$, donc $\mathrm{d}t = \frac{2x\,\mathrm{d}x}{x^2+1}$. Par changement de variable :

$$I_{29} = \int_{\ln 2}^{2\ln 2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{e^t - 1}} = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2\,\mathrm{d}x}{x^2 + 1}$$

On en déduit :

$$I_{29} = 2\Big[\arctan x\Big]_1^{\sqrt{3}} = \boxed{\frac{\pi}{6}}$$

• Pour le calcul de I_{30} on commence par écrire :

$$I_{30} = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\mathrm{d}t}{\cos t} = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{1 - \sin^2 t}$$

On applique ensuite le changement de variable $x = \sin t$.

La fonction $t \mapsto \sin t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$ et sa dérivée est $\frac{dx}{\mathrm{d}t} = \cos t$, ce qui montre que $dx = \cos t\,\mathrm{d}t$.

Par changement de variable :

$$I_{30} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1-x^2}$$

On décompose en éléments simples :

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right]$$

Puis on calcule :

$$I_{30} = \frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{1+x} - \frac{-1}{1-x}\right) dx = \frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \boxed{\ln 3}$$

• L'intégrale I_{31} se calcule par intégration par parties.

Soit $u(t) = t$ et $v'(t) = \frac{1}{\cos^2 t}$ puis $u'(t) = 1$ et $v(t) = \tan t$.

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, par intégration par parties :

$$I_{31} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{t\,\mathrm{d}t}{\cos^2 t} = \Big[t\,\tan t\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan t\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} + \Big[\ln|\cos t|\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \boxed{\frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}}$$

• L'intégrale $I_{32} = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{t\,\mathrm{d}t}{\cos t}$ est nulle car la fonction $t \mapsto \dfrac{t}{\cos t}$ est impaire.

Pour démontrer ceci on applique le changement de variable $x = -t$.

La fonction $x \mapsto -x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $\frac{\mathrm{d}t}{dx} = -1$, d'où $\mathrm{d}t = -dx$ puis par changement de variable :

$$I_{32} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{-\frac{\pi}{6}} -\frac{-x\,dx}{\cos(-x)} = -\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{x\,dx}{\cos x} = -I_{32}$$

Ceci donne comme annoncé : $\boxed{I_{32} = 0}$

• Pour le calcul de I_{34} on utilise la changement de variable $x = e^t$.

La fonction $t \mapsto e^t$ est de classe $\mathcal{C}^1$, sa dérivée est $\frac{dx}{\mathrm{d}t} = e^t = x$, donc $\mathrm{d}t = \frac{dx}{x}$.

Par changement de variable :

$$I_{34} = \int_0^{\ln 2} \frac{\mathrm{d}t}{e^t - 2 - 3e^{-t}} = \int_1^2 \frac{dx}{x(x-2-\frac{3}{x})} = \int_1^2 \frac{dx}{x^2-2x+3}$$

On décompose en éléments simples :

$$\frac{1}{x^2-2x-3} = \frac{1}{(x-3)(x+1)} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+1}\right]$$

On en déduit :

$$I_{34} = \frac{1}{4}\int_1^2 \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+1}\right) \mathrm{d}t = \frac{1}{4}\Big[\ln|x-3| - \ln|x+1|\Big]_1^2 = \boxed{-\frac{\ln 3}{4}}$$

• Pour le calcul de I_{35} on reconnaît la forme $u'u^n$:

$$I_{35} = \int_1^e \frac{\ln^n t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_1^e \frac{1}{t}(\ln t)^n\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\ln^{n+1} t}{n+1}\right]_1^e = \boxed{\frac{1}{n+1}}$$

• Pour le calcul de I_{36} on utilise le changement de variable $t = \operatorname{sh} x$.
La fonction $x \mapsto \operatorname{sh} x$ est de classe $\mathcal{C}^1$, de dérivée $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \operatorname{ch} x$.
Elle est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ donc 2 admet un unique antécédent que l'on note α : $\operatorname{sh}\alpha = 2$.
Par changement de variable :

$$I_{36} = \int_0^2 \sqrt{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \int_0^\alpha \sqrt{\operatorname{sh}^2 x + 1}\,\operatorname{ch} x\,\mathrm{d}x = \int_0^\alpha |\operatorname{ch} x|\operatorname{ch} x\,\mathrm{d}x$$

Comme $\operatorname{ch} x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ alors $|\operatorname{ch} x| = \operatorname{ch} x$.
On calcule : $\operatorname{ch}^2 x = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x + 1)$, donc :

$$I_{36} = \frac{1}{2}\int_0^\alpha (1 + \operatorname{ch} 2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[x + \frac{\operatorname{sh} 2x}{2}\right]_0^\alpha = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{\operatorname{sh} 2\alpha}{2}\right)$$

On calcule α en résolvant l'équation $\operatorname{sh}\alpha = 2$.
Celle-ci donne $X^2 - 4X - 1 = 0$ en posant $X = e^\alpha$, donc $X = 2 \pm \sqrt{5}$. Comme X est strictement positif alors $X = 2 + \sqrt{5}$ et $\alpha = \ln\left(2 + \sqrt{5}\right)$.

Ceci donne $\operatorname{sh} 2\alpha = 4\sqrt{5}$, puis $\boxed{I_{36} = \frac{\ln(2+\sqrt{5})}{2} + \sqrt{5}}$.