Corrigé partiel du T. D. A6
Primitives

1 Calculer une primitive de chacune des fonctions suivantes.

$$f_2(x) = \frac{1}{x^2 - 2x - 1} \qquad f_4(x) = \frac{x}{4x^2 + 4x + 1}$$
$$f_6(x) = \frac{9}{x^2 - 9x} \qquad f_8(x) = \frac{1}{1 - 3x + \frac{9}{2}x^2}$$

• Pour intégrer f_2 on décompose en éléments simples :

$$f_2(x) = \frac{1}{(x - 1 - \sqrt{2})(x - 1 + \sqrt{2})} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\frac{1}{x - 1 - \sqrt{2}} - \frac{1}{x - 1 + \sqrt{2}}\right]$$

Donc une primitive de f_2 est :

$$\boxed{F_2(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{x - 1 - \sqrt{2}}{x - 1 + \sqrt{2}}\right|}$$

• Pour intégrer f_4 on fait apparaître la dérivée du dénominateur :

$$f_4(x) = \frac{x}{(2x+1)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2x+1}{(2x+1)^2} - \frac{1}{(2x+1)^2}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{2}{2x+1} - \frac{2}{(2x+1)^2}\right)$$

On en déduit une primitive de f_4 :

$$\boxed{F_4(x) = \frac{1}{4}\left[\ln|2x+1| + \frac{1}{2x+1}\right]}$$

• Pour intégrer f_6 on décompose en éléments simples :

$$f_6(x) = \frac{9}{x(x-9)} = \frac{1}{x-9} - \frac{1}{x}$$

Donc une primitive de f_6 est :

$$\boxed{F_6(x) = \ln|x-9| - \ln|x| = \ln\left|1 - \frac{9}{x}\right|}$$

• Pour intégrer f_8 on écrit la forme canonique du dénominateur :

$$f_8(x) = \frac{2}{9}\frac{1}{x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{2}{9}} = \frac{2}{9}\frac{1}{\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{9}} = \frac{2}{3}\frac{3}{(3x-1)^2 + 1}$$

On reconnaît une forme $\frac{u'}{u^2+1}$, donc une primitive de f_8 est :

$$\boxed{F_8(x) = \frac{2}{3}\arctan(3x-1)}$$

2 Calculer une primitive des fonctions :

$$f(x) = \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}$$

sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right[$.

On calcule $F(x) + G(x)$ et $F(x) - G(x)$. On en déduit :

$F(x) = \frac{1}{2}(x + \ln(\cos x + \sin x))$ et $G(x) = \frac{1}{2}(x - \ln(\cos x + \sin x))$

3 Calculer les intégrales suivantes

$$I_1 = \int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}} \qquad I_2 = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin 2x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x$$

$$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x} \qquad I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x+\sin x}$$

à l'aide des changements de variables $t = \frac{1}{x}$, $t = \cos x$ et $t = \tan\frac{x}{2}$.

Réponses :

$I_1 = \frac{\pi}{12}$ $I_2 = 3 - 4\ln 2$ $I_3 = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$ $I_4 = \ln 2$

4 Calculer l'intégrale :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan t)\mathrm{d}t$$

en utilisant un changement de variable affine échangeant ses bornes.

Le changement de variable $x = \frac{\pi}{4} - t$ montre que $I = \frac{\pi\ln 2}{4} - I$, donc : $I = \frac{\pi\ln 2}{8}$

$\boxed{5}$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note :

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

a. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$$

En déduire que la suite (I_n) converge.

b. Calculer $I_{n-1} + I_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

c. Déterminer la limite de la suite :

$$u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$$

a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme :

$$\forall t \in [0,1] \qquad 0 \leqslant \frac{t^n}{1+t} \leqslant t^n$$

Alors par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^1 0\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t.$$

Ceci donne :

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$$

Par théorème d'encadrement la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par linéarité :

$$I_{n-1} + I_n = \int_0^1 \frac{t^{n-1}+t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^{n-1}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^n}{n}\right]_0^1 = \frac{1}{n}.$$

c. Par définition de u_n :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{1}{k}.$$

D'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}(I_{k-1} + I_k).$$

Par télescopage :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} I_{k-1} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} I_k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k I_k - \sum_{k=1}^{n} (-1)^k I_k = I_0 - (-1)^n I_n.\end{aligned}$$

Comme la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers I_0 :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = I_0 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \Big[\ln|1+t|\Big]_0^1 = \boxed{\ln 2}$$

6 Déterminer, pour chacune des intégrales suivantes, quelle méthode permet de la calculer : primitives usuelles, manipulation d'expressions polynomiales et décomposition en éléments simples, linéarisation d'expressions trigonométriques, intégration par parties, changement de variable (dire lequel), autre.

$I_1 = \int_0^4 \frac{2t}{t+2}\,dt$ $\quad I_2 = \int_{-1}^1 \frac{3t-4}{(t-2)^2}\,dt$ $\quad I_3 = \int_0^2 \frac{2t-1}{(t+1)^2}\,dt$

$I_4 = \int_0^1 \frac{t^2+t+1}{2t+1}\,dt$ $\quad I_5 = \int_4^8 \frac{4dt}{t^2-4t+3}$ $\quad I_6 = \int_a^{2a} \frac{dt}{t(t+a)} \quad a \neq 0$

$I_7 = \int_0^1 \frac{4t+1}{t^2+1}\,dt$ $\quad I_8 = \int_2^{2\sqrt{3}} \frac{t^2}{t^2+4}\,dt$ $\quad I_9 = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{8t\,dt}{(3t^2-2)^4}$

$I_{10} = \int_{-1}^0 \frac{t\,dt}{t^4-4}$ $\quad I_{11} = \int_1^2 \frac{dt}{t(t^3+2)}$ $\quad I_{12} = \int_0^1 \frac{t\,dt}{t^4-t^2-2}$

$I_{13} = \int_0^{\frac{1}{2}} t(2t-1)^8\,dt$ $\quad I_{14} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^4 t\,dt$ $\quad I_{15} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\tan t)^2\,dt$

$I_{16} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sin^2 t\cos^2 t\,dt$ $\quad I_{17} = \int_0^{\pi} \frac{\sin t\,dt}{8+\sin^2 t}$ $\quad I_{18} = \int_0^x t^3 e^{-t^2/2}\,dt$

$I_{19} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{2t}\cos 3t\,dt$ $\quad I_{20} = \int_{-\ln 3}^{\ln 3} e^{-t}\,\mathrm{ch}\,t\,dt$ $\quad I_{21} = \int_{-2}^2 t\,\mathrm{sh}\,t\,dt$

$I_{22} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 3t\cos 2t\,dt$ $\quad I_{23} = \int_0^{\ln 2} \mathrm{ch}\,t\,\mathrm{sh}\,2t\,dt$ $\quad I_{24} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\left(t+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(t-\frac{\pi}{3}\right)dt$

$I_{25} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \arccos t\,dt$ $\quad I_{26} = \int_0^A t^2 e^{-t}\,dt$ $\quad I_{27} = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dt}{1+e^t}$

$I_{28} = \int_1^3 \frac{dt}{t\sqrt{t+1}}$ $\quad I_{29} = \int_{\ln 2}^{2\ln 2} \frac{dt}{\sqrt{e^t-1}}$ $\quad I_{30} = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{dt}{\cos t}$

$I_{31} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{t\,dt}{\cos^2 t}$ $\quad I_{32} = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{t\,dt}{\cos t}$ $\quad I_{33} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^3 t}{1+4\sin^2 t}\,dt$

$I_{34} = \int_0^{\ln 2} \frac{dt}{e^t-2-3e^{-t}}$ $\quad I_{35} = \int_1^e \frac{\ln^n t\,dt}{t}$ $\quad I_{36} = \int_0^{\frac{3}{4}} \sqrt{t^2+1}\,dt$

$I_{37} = \int_1^6 \frac{\ln(t^2+4)}{t^2}\,dt$ $\quad I_{38} = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\arcsin t}{1-t^2}}\,dt$

Calculer ensuite ces intégrales.

On pourra puiser dans la liste suivante de changements de variables utiles : $x = at+b$ avec (a,b) à déterminer, $x = t^2$, $x = t^3$, $x = \tan t$, $x = \cos t$, $x = e^t$, $x = \sqrt{t+1}$, $x = \sqrt{e^t-1}$, $t = \mathrm{sh}\,x$...

Méthodes :

I_1 : FR	I_2 : FR	I_3 : FR
I_4 : FR ou CV $x = 2t + 1$	I_5 : DES	I_6 : DES
I_7 : PU	I_8 : FR ou CV $t = 2x$	I_9 : PU ou CV $x = 3t^2 - 2$
I_{10} : CV $x = t^2$ puis DES	I_{11} : CV $x = t^3$	I_{12} : CV $x = t^2$ puis DES
I_{13} : IPP ou CV $x = 2t - 1$	I_{14} : CV $x = \tan t$	I_{15} : PU
I_{16} : Linéarisation	I_{17} : CV $x = \cos t$ puis DES	I_{18} : IPP
I_{19} : Complexes	I_{20} : PU	I_{21} : IPP
I_{22} : Linéarisation	I_{23} : PU ou linéarisation	I_{24} : Linéarisation
I_{25} : IPP	I_{26} : IPP	I_{27} : CV $x = e^t$
I_{28} : CV $x = \sqrt{t+1}$	I_{29} : CV $x = \sqrt{e^t - 1}$	I_{30} : CV $x = \sin t$
I_{31} : IPP	I_{32} : Parité	I_{33} : CV $x = 2\sin t$
I_{34} : CV $x = e^t$ puis DES	I_{35} : PU	I_{36} : CV $t = \operatorname{sh} t$
I_{37} : IPP	I_{38} : PU	

Réponses :

$I_1 = 8 - 4\ln 3$	$I_2 = \frac{4}{3} - 3\ln 3$	$I_3 = 2\ln 3 - 2$
$I_4 = \frac{1}{8}(3\ln 3 + 4)$	$I_5 = 2\ln\frac{15}{7}$	$I_6 = \frac{1}{a}\ln\frac{4}{3}$
$I_7 = 2\ln 2 + \frac{\pi}{4}$	$I_8 = 2\sqrt{3} - 2 - \frac{\pi}{6}$	$I_9 = \frac{7}{16}$
$I_{10} = \frac{1}{8}\ln 3$	$I_{11} = \frac{1}{6}\ln\frac{12}{5}$	$I_{12} = -\frac{\ln 2}{3}$
$I_{13} = \frac{1}{360}$	$I_{14} = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}$	$I_{15} = 1 + \ln 2$
$I_{16} = \frac{3\pi}{32}$	$I_{17} = \frac{\ln 2}{3}$	$I_{18} = 2 - (x^2 + 2)e^{-x^2/2}$
$I_{19} = -\frac{2}{13}\left(e^{\frac{2\pi}{3}} + 1\right)$	$I_{20} = \frac{20}{9} + \ln 3$	$I_{21} = e^2 + 3e^{-2}$
$I_{22} = \frac{3}{10}$	$I_{23} = \frac{61}{96}$	$I_{24} = \frac{1}{4} - \frac{\pi}{16}$
$I_{25} = \frac{\pi}{2}$	$I_{26} = 2 - (A^2 + 2A + 2)e^{-A}$	$I_{27} = \ln\frac{9}{8}$
$I_{28} = \ln\left(1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$	$I_{29} = \frac{\pi}{6}$	$I_{30} = \ln 3$
$I_{31} = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$	$I_{32} = 0$	$I_{33} = \frac{5\pi - 3\sqrt{3}}{24}$
$I_{34} = -\frac{\ln 3}{4}$	$I_{35} = \frac{1}{n+1}$	$I_{36} = \frac{\ln 2}{2} + \frac{15}{32}$
$I_{37} = \frac{5}{6}\ln 5 - \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4}$	$I_{38} = \frac{\pi\sqrt{\pi}}{9\sqrt{6}}$	

• Pour le calcul de I_2 on peut appliquer le changement de variable $x = t - 2$, ou alors directement :

$$I_2 = \int_{-1}^{1} \frac{3(t-2)+2}{(t-2)^2}\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} \frac{3}{t-2} + \frac{2}{(t-2)^2}\,\mathrm{d}t = \left[3\ln|t-2| - \frac{2}{t-2}\right]_{-1}^{1} = \boxed{\frac{4}{3} - 3\ln 3}$$

• Pour le calcul de I_3 on peut appliquer le changement de variable $x = t + 1$, ou alors directement :

$$I_3 = \int_0^2 \frac{2t-1}{(t+1)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^2 \frac{2(t+1)-3}{(t+1)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^2 \frac{2}{t+1} - \frac{3}{(t+1)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= \left[2\ln|t+1| + \frac{3}{t+1}\right]_0^2 = \boxed{2\ln 3 - 2}$$

• Pour le calcul de I_4 on applique le changement de variable $x = 2t + 1$.

La fonction $t \mapsto 2t + 1$ est de classe $\mathscr{C}^1$, $\mathrm{d}x = 2\mathrm{d}t$ et $t = \frac{x-1}{2}$ donc :

$$I_4 = \int_1^3 \left(\frac{1}{4}\,\frac{x^2+3}{x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{2} = \int_1^3 \frac{1}{8}\left(x + \frac{3}{x}\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{8}\left(\frac{x^2}{2} + 3\ln|x|\right)\right]_1^3 = \boxed{\frac{1}{8}(3 + 3\ln 3)}$$

• Pour le calcul de I_5 on décompose la fonction rationnelle en éléments simples :

$$\frac{4}{t^2-4t+3} = \frac{2}{t-3} - \frac{2}{t-1}$$

Ceci permet de calculer :

$$I_5 = \int_4^8 \frac{4\mathrm{d}t}{t^2-4t+3} = \int_4^8 \frac{2}{t-3} - \frac{2}{t-1}\,\mathrm{d}t = \Big[2\ln|t-3| - 2\ln|t-1|\Big]_4^8 = \boxed{2\ln\frac{15}{7}}$$

• Pour le calcul de I_6 on décompose en éléments simples :

$$\frac{1}{t(t+a)} = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+a}\right)$$

Ceci donne

$$I_6 = \int_a^{2a} \frac{\mathrm{d}t}{t(t+a)} = \frac{1}{a}\int_a^{2a}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+a}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\Big[\ln|t| - \ln|t+a|\Big]_a^{2a} = \boxed{\frac{1}{a}\ln\frac{4}{3}}$$

• Pour le calcul de I_9 on reconnaît une primitive usuelle de la forme $u'u^\alpha$:

$$I_9 = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{8t\,\mathrm{d}t}{(3t^2-2)^4} = \frac{8}{6}\int_1^{\sqrt{2}} 6t(3t^2-2)^{-4}\,\mathrm{d}t = \frac{4}{3}\left[\frac{(3t^2-2)^{-3}}{-3}\right]_1^{\sqrt{2}} = \boxed{\frac{7}{16}}$$

• Pour le calcul de I_{10} on applique le changement de variable $x = t^2$.

La fonction $t \mapsto t^2$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $[-1, 0]$, de dérivée $t \mapsto 2t$. Ceci donne $\frac{dx}{\mathrm{d}t} = 2t$ puis $2t\mathrm{d}t = dx$. Par changement de variable :

$$I_{10} = \int_{-1}^{0} \frac{t\,\mathrm{d}t}{t^4 - 4} = \int_{1}^{0} \frac{1}{2}\, \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - 4}$$

On décompose la fonction rationnelle en éléments simples :

$$\frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\right]$$

On en déduit :

$$I_{10} = \frac{1}{8}\int_{1}^{0} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{8}\Big[\ln|x-2| - \ln|x+2|\Big]_{1}^{0} = \boxed{\frac{\ln 3}{8}}$$

• Pour le calcul de I_{12} on applique le changement de variable $x = t^2$.

La fonction $t \mapsto t^2$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et $\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$ donc $t\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{2}$. Par changement de variable :

$$I_{12} = \int_{0}^{1} \frac{1}{2}\, \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - x - 2} = \frac{1}{2}\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{(x-2)(x+1)}$$

Par décomposition en éléments simples :

$$I_{12} = \frac{1}{6}\int_{0}^{1} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1}\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{6}\Big[\ln|x-2| - \ln|x+1|\Big]_{0}^{1} = \boxed{-\frac{\ln 2}{3}}$$

• Plusieurs méthodes sont possibles pour calculer I_{13} : intégration par parties, changement de variable $x = 2t - 1$, ou directement manipulation de polynômes, comme ci-dessous :

$$t(2t-1)^8 = \frac{1}{2}(2t-1+1)(2t-1)^8 = \frac{1}{2}(2t-1)^9 + \frac{1}{2}(2t-1)^8$$

On en déduit :

$$I_{13} = \frac{1}{4}\int_{0}^{\frac{1}{2}} \Big(2(2t-1)^9 + 2(2t-1)^8\Big)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\left[\frac{(2t-1)^{10}}{10} + \frac{(2t-1)^9}{9}\right]_{0}^{\frac{1}{2}} = \boxed{\frac{1}{360}}$$

• Pour le calcul de I_{14} on applique le changement de variable $x = \tan t$.

La fonction $t \mapsto \tan t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, et $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 1 + \tan^2 t = 1 + x^2$. On en déduit :

$$I_{14} = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan^4 t\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{1} x^4\, \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

Il reste à manipuler la fonction rationnelle :

$$\frac{x^4}{1+x^2} = \frac{x^4+x^2-x^2-1+1}{1+x^2} = x^2-1+\frac{1}{x^2+1}$$

On en déduit

$$I_{14} = \left[\frac{x^3}{3} - x + \arctan x\right]_0^1 = \boxed{\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}}$$

• Pour le calcul de I_{15} on fait apparaître des primitives usuelles :

$$I_{15} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\tan t)^2 \,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \Big(1+\tan^2 t + 2\tan t\Big)\,\mathrm{d}t$$

$$= \Big[\tan t - 2\ln|\cos t|\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \boxed{1+\ln 2}$$

• Pour le calcul de I_{16} on linéarise l'expression trigonométrique, en utilisant les formules de trigonométrie ou les formules d'Euler.

$$\sin^2 t\cos^2 t = \left(\frac{\sin(2t)}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\sin^2(2t) = \frac{1}{4}\,\frac{1-\cos(4t)}{2}$$

Ceci donne :

$$I_{16} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sin^2 t\cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{8}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (1-\cos(4t))\,\mathrm{d}t = \frac{1}{8}\left[t - \frac{\sin(4t)}{4}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} = \boxed{\frac{3\pi}{32}}$$

• Pour le calcul de I_{17} on applique le changement de variable $x = \cos t$.

La fonction $t \mapsto \cos t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $[0,\pi]$, de dérivée $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\sin t$ ce qui donne $\mathrm{d}x = -\sin t\,\mathrm{d}t$, et par changement de variable :

$$I_{17} = \int_0^{\pi} \frac{\sin t\,\mathrm{d}t}{8+\sin^2 t} = \int_1^{-1} \frac{-\mathrm{d}x}{9-x^2}$$

Par décomposition en éléments simples :

$$I_{17} = \int_{-1}^{1} \frac{1}{6}\left(\frac{1}{3+x} + \frac{1}{3-x}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{6}\Big[\ln|3+x| - \ln|3-x|\Big]_{-1}^{1} = \boxed{\frac{\ln 2}{3}}$$

• Pour le calcul de I_{18} on utiliser une intégration par parties en posant $u'(t) = te^{-t^2/2}$ et $v(t) = t^2$. Alors $u(t) = -e^{-t^2/2}$ et $v'(t) = 2t$, les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ et donc :

$$I_{18} = \int_0^x t^3 e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = \Big[-t^2 e^{-t^2/2}\Big]_0^x + \int_0^x 2te^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$$

$$= -x^2 e^{-x^2/2} - 2\Big[e^{-t^2/2}\Big]_0^x = \boxed{2-(2+x^2)e^{-x^2/2}}$$

• Pour le calcul de I_{19} on utilise les complexes :

$$I_{19} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{2t}\cos 3t \,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{2t}\,\mathrm{Re}\left(e^{3it}\right)\mathrm{d}t = \mathrm{Re}\left(\int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{(2+3i)t}\,\mathrm{d}t\right)$$

On calcule :

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{(2+3i)t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{(2+3i)t}}{2+3i}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{2-3i}{13}\left(e^{\frac{2\pi}{3}+i\pi}-1\right) = -\frac{2-3i}{13}\left(e^{\frac{2\pi}{3}}+1\right)$$

La partie réelle de ce complexe est : $\boxed{I_{19} = -\dfrac{2(e^{\frac{2\pi}{3}}+1)}{13}}$

• Pour le calcul de I_{20} on écrit $e^{-t}\,\mathrm{ch}\,t = \frac{1}{2}(1+e^{-2t})$ puis :

$$I_{20} = \int_{-\ln 3}^{\ln 3} e^{-t}\,\mathrm{ch}\,t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-\ln 3}^{\ln 3}\left(1+e^{-2t}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[t-\frac{e^{-2t}}{2}\right]_{-\ln 3}^{\ln 3} = \boxed{\frac{20}{9}+\ln 3}$$

• Pour le calcul de I_{21} on utilise une intégration par parties.

On pose $u(t) = t$ et $v(t) = \mathrm{ch}\,t$. Alors u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$, de dérivées $u'(t) = 1$ et $v'(t) = \mathrm{sh}\,t$. En intégrant par parties :

$$\begin{aligned} I_{21} &= \int_{-2}^{2} t\,\mathrm{sh}\,t\,\mathrm{d}t = \Big[t\,\mathrm{ch}\,t\Big]_{-2}^{2} - \int_{-2}^{2}\mathrm{ch}\,t\,\mathrm{d}t \\ &= \Big[t\,\mathrm{ch}\,t - \mathrm{sh}\,t\Big]_{-2}^{2} = \boxed{4\,\mathrm{ch}\,2 - 2\,\mathrm{sh}\,2} = \boxed{e^2+3e^{-2}} \end{aligned}$$

• Pour le calcul de I_{22} on linéarise l'expression trigonométrique grâce aux formules d'Euler :

$$\sin 3t\cos 2t = \frac{(e^{i3t}-e^{-i3t})}{2i}\,\frac{(e^{i2t}+e^{-i2t})}{2} = \frac{e^{i5t}+e^{it}-e^{-it}-e^{-5it}}{4i} = \frac{1}{2}(\sin 5t+\sin t)$$

Ceci donne :

$$I_{22} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 3t\cos 2t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sin 5t+\sin t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{5}\cos 5t-\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \boxed{\frac{3}{10}}$$

• Pour le calcul de I_{23} on pourrait linéariser l'expression hyperbolique, mais on peut aussi utiliser la formule $\mathrm{sh}\,2t = 2\,\mathrm{sh}\,t\,\mathrm{ch}\,t$, puis reconnaître une formule de type $u'u^2$:

$$I_{23} = \int_0^{\ln 2}\mathrm{ch}\,t\,\mathrm{sh}\,2t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\ln 2} 2\,\mathrm{sh}\,t\,\mathrm{ch}^2\,t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{2}{3}\,\mathrm{ch}^3\,t\right]_0^{\ln 2} = \boxed{\frac{61}{96}}$$

• Pour le calcul de I_{24} on linéarise, en utilisant les formules d'Euler :

$$\begin{aligned} I_{24} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\left(t+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(t-\frac{\pi}{3}\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos(2t)+\cos\frac{2\pi}{3}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2t)}{2}-\frac{t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \boxed{\frac{1}{4}-\frac{\pi}{16}} \end{aligned}$$

• Pour le calcul de I_{25} on intègre par parties, en posant $u(t) = t$ et $v(t) = \arccos t$. Ces deux fonctions sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, de dérivées $u'(t) = 1$ et $v'(t) = \frac{-1}{\sqrt{1-t^2}}$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} I_{25} &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (1\times\arccos t)\,\mathrm{d}t = \Big[t\arccos t\Big]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{6}-\frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(-2t)(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\Big[2\sqrt{1-t^2}\Big]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \boxed{\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

• Pour le calcul de I_{26} on utilise deux intégrations par parties successives.

On pose $u(t) = t^2$ et $v(t) = -e^{-t}$. Alors les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $[0, A]$ (ou $[A, 0]$ si $A < 0$), de dérivées $u'(t) = 2t$ et $v'(t) = e^{-t}$. Par intégration par parties :

$$I_{26} = \int_0^A t^2e^{-t}\,\mathrm{d}t = \Big[-t^2e^{-t}\Big]_0^A + \int_0^A 2te^{-t}\,\mathrm{d}t$$

On pose alors (indépendemment du calcul précédent) $u(t) = 2t$ et $v(t) = -e^{-t}$. Alors u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$, de dérivées $u'(t) = 2$ et $v'(t) = e^{-t}$. Par intégration par parties :

$$I_{26} = \Big[-t^2e^{-t}\Big]_0^A + \Big[-2te^{-t}\Big]_0^A + \int_0^A 2e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

Ceci donne :

$$I_{26} = \Big[-t^2e^{-t}-2te^{-t}-2e^{-t}\Big]_0^A = \boxed{2-(A^2+2A+2)e^{-A}}$$

• Pour le calcul de I_{27} on utilise le changement de variable $x = e^t$, même si $x = e^{-t}$ conviendrait mieux.

La fonction $t \mapsto e^t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $[\ln 2, \ln 3]$, sa dérivée est $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = e^t = x$.

Ainsi $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{x}$ et par changement de variable :

$$I_{27} = \int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{\mathrm{d}t}{1+e^t} = \int_2^3\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x)}$$

On décompose la fonction rationnelle en éléments simples :

$$I_{27} = \int_2^3 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}\right) \mathrm{d}x = \Big[\ln|x| - \ln|1+x|\Big]_2^3 = \boxed{2\ln 3 - 3\ln 2 = \ln\frac{9}{8}}$$

• Pour le calcul de I_{28} on utilise le changement de variable $x = \sqrt{t+1}$, qui donne $t = x^2 - 1$.

La fonction $t \mapsto \sqrt{t+1}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[1,3]$, de dérivée $t \mapsto \frac{1}{2\sqrt{t+1}} = \frac{1}{2x}$, donc $\mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x$ puis par changement de variable :

$$I_{28} = \int_1^3 \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t+1}} = \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{2x\,\mathrm{d}x}{(x^2-1)x} = \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{2\,\mathrm{d}x}{(x-1)(x+1)}$$

Par décomposition en éléments simples :

$$I_{28} = \int_{\sqrt{2}}^2 \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) \mathrm{d}x = \Big[\ln|x-1| - \ln|x+1|\Big]_{\sqrt{2}}^2 = \boxed{\ln\left(1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)}$$

• Pour le calcul de I_{29} on utilise le changement de variable $x = \sqrt{e^t - 1}$.

La fonction $t \mapsto \sqrt{e^t - 1}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $[\ln 2, 2\ln 2]$ car $t + 1 > 0$ sur ce segment. Sa dérivée est $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{e^t}{2\sqrt{e^t-1}} = \frac{x^2+1}{2x}$, donc $\mathrm{d}t = \frac{2x\,\mathrm{d}x}{x^2+1}$. Par changement de variable :

$$I_{29} = \int_{\ln 2}^{2\ln 2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{e^t-1}} = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2\,\mathrm{d}x}{x^2+1}$$

On en déduit :

$$I_{29} = 2\Big[\arctan x\Big]_1^{\sqrt{3}} = \boxed{\frac{\pi}{6}}$$

• Pour le calcul de I_{30} on commence par écrire :

$$I_{30} = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\mathrm{d}t}{\cos t} = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{1 - \sin^2 t}$$

On applique ensuite le changement de variable $x = \sin t$.

La fonction $t \mapsto \sin t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$ et sa dérivée est $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \cos t$, ce qui montre que $\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$.

Par changement de variable :

$$I_{30} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1 - x^2}$$

On décompose en éléments simples :

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right]$$

Puis on calcule :

$$I_{30} = \frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{1+x} - \frac{-1}{1-x} \right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \boxed{\ln 3}$$

• L'intégrale I_{31} se calcule par intégration par parties.

Soit $u(t) = t$ et $v'(t) = \frac{1}{\cos^2 t}$ puis $u'(t) = 1$ et $v(t) = \tan t$.

Les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, par intégration par parties :

$$I_{31} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{t\,\mathrm{d}t}{\cos^2 t} = \Big[t\ \tan t \Big]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan t\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} + \Big[\ln|\cos t| \Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \boxed{\frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}}$$

• L'intégrale $I_{32} = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{t\,\mathrm{d}t}{\cos t}$ est nulle car la fonction $t \mapsto \dfrac{t}{\cos t}$ est impaire.

Pour démontrer ceci on applique le changement de variable $x = -t$.

La fonction $x \mapsto -x$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = -1$, d'où $\mathrm{d}t = -\mathrm{d}x$ puis par changement de variable :

$$I_{32} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{-\frac{\pi}{6}} -\frac{-x\,\mathrm{d}x}{\cos(-x)} = -\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{x\,\mathrm{d}x}{\cos x} = -I_{32}$$

Ceci donne comme annoncé : $\boxed{I_{32} = 0}$

• Pour le calcul de I_{33} on utilise le changement de variable $x = 2\sin t$.

La fonction $t \mapsto 2\sin t$ est de classe $\mathscr{C}^1$, de dérivée $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2\cos t$, donc $\mathrm{d}x = 2\cos t\,\mathrm{d}t$.

Par changement de variable :

$$I_{33} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^3 t\,\mathrm{d}t}{1 + 4\sin^2 t} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(1 - \sin^2 t)\cos t\,\mathrm{d}t}{1 + (2\sin t)^2} = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{\left(1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2\right)\frac{\mathrm{d}x}{2}}{1 + x^2}$$

On calcule :

$$I_{33} = \frac{1}{8}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{4 - x^2}{1 + x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\int_0^{\sqrt{3}} \left(\frac{5}{1 + x^2} - 1 \right) \mathrm{d}x = \frac{1}{8}\Big[5\arctan x - x \Big]_0^{\sqrt{3}} = \boxed{\frac{5\pi}{24} - \frac{\sqrt{3}}{8}}$$

• Pour le calcul de I_{34} on utilise le changement de variable $x = e^t$.

La fonction $t \mapsto e^t$ est de classe $\mathscr{C}^1$, sa dérivée est $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = e^t = x$, donc $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{x}$.

Par changement de variable :

$$I_{34} = \int_0^{\ln 2} \frac{\mathrm{d}t}{e^t - 2 - 3e^{-t}} = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x(x - 2 - \frac{3}{x})} = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - 2x + 3}$$

On décompose en éléments simples :

$$\frac{1}{x^2 - 2x - 3} = \frac{1}{(x-3)(x+1)} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+1}\right]$$

On en déduit :

$$I_{34} = \frac{1}{4}\int_1^2 \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+1}\right) \mathrm{d}t = \frac{1}{4}\Big[\ln|x-3| - \ln|x+1|\Big]_1^2 = \boxed{-\frac{\ln 3}{4}}$$

• Pour le calcul de I_{35} on reconnaît la forme $u'u^n$:

$$I_{35} = \int_1^e \frac{\ln^n t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_1^e \frac{1}{t}(\ln t)^n\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\ln^{n+1} t}{n+1}\right]_1^e = \boxed{\frac{1}{n+1}}$$

• Pour le calcul de I_{36} on utilise le changement de variable $t = \operatorname{sh} x$.

La fonction $x \mapsto \operatorname{sh} x$ est de classe $\mathscr{C}^1$, de dérivée $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \operatorname{ch} x$.

Elle est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ donc $\frac{3}{4}$ admet un unique antécédent que l'on note α : $\operatorname{sh}\alpha = \frac{3}{4}$.

Par changement de variable :

$$I_{36} = \int_0^{\frac{3}{4}} \sqrt{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\alpha} \sqrt{\operatorname{sh}^2 x + 1}\,\operatorname{ch} x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\alpha} |\operatorname{ch} x|\operatorname{ch} x\,\mathrm{d}x$$

Comme $\operatorname{ch} x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ alors $|\operatorname{ch} x| = \operatorname{ch} x$.

On calcule : $\operatorname{ch}^2 x = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x + 1)$, donc :

$$I_{36} = \frac{1}{2}\int_0^{\alpha} (1 + \operatorname{ch} 2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[x + \frac{\operatorname{sh} 2x}{2}\right]_0^{\alpha} = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{\operatorname{sh} 2\alpha}{2}\right)$$

On calcule α en résolvant l'équation $\operatorname{sh}\alpha = \frac{3}{4}$.

Celle-ci donne $X^2 - \frac{3}{2}X - 1 = 0$ en posant $X = e^{\alpha}$, donc $X = 2$ ou $X = -\frac{1}{2}$. Comme X est strictement positif alors $X = 2$ et $\alpha = \ln 2$.

Ceci donne $\operatorname{sh} 2\alpha = \frac{15}{8}$, puis $\boxed{I_{36} = \frac{\ln 2}{2} + \frac{15}{32}}$.

• Pour le calcul de I_{37} on utilise une intégration par parties.

Pour tout $t \in [1,6]$, soit $u(t) = \ln(t^2+4)$ et $v(t) = -\frac{1}{t}$.

Ces fonctions sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1,6]$, de dérivées $u'(t) = \frac{2t}{t^2+4}$ et $v'(t) = \frac{1}{t^2}$.

Par intégration par parties :

$$I_{37} = \int_1^6 \frac{\ln(t^2+4)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\ln(t^2+4)}{t}\right]_1^6 + \int_1^6 \frac{2}{t^2+4}\,\mathrm{d}t$$

On obtient :

$$\begin{aligned} I_{37} = -\frac{\ln 40}{6} + \ln 5 + \int_1^6 \frac{\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{t}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}t &= \frac{5}{6}\ln 5 - \frac{1}{6}\ln 8 + \left[\arctan\frac{t}{2}\right]_1^6 \\ &= \frac{5}{6}\ln 5 - \frac{1}{2}\ln 2 + \left(\arctan 3 - \arctan\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

On peut remarquer que :

$$\tan\left(\arctan 3 - \arctan\frac{1}{2}\right) = 1 \qquad \text{avec} \quad -\frac{\pi}{2} < \arctan 3 - \arctan\frac{1}{2} < \frac{\pi}{2}$$

donc $\left(\arctan 3 - \arctan\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$ et enfin :

$$\boxed{I_{37} = \frac{5\ln 5}{6} - \frac{\ln 2}{2} + \frac{\pi}{4}}$$

• Pour le calcul de I_{38} on remarque une primitive usuelle $u'u^\alpha$:

$$I_{38} = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\arcsin t}{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}(\arcsin t)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t$$

On en déduit :

$$I_{38} = \left[\frac{\arcsin^{\frac{3}{2}} t}{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{\frac{3}{2}} = \boxed{\frac{\pi\sqrt{\pi}}{9\sqrt{6}}}$$

7 Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on pose $F(x) = \displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

a. Justifier que F est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Appliquer le changement de variable $t = \frac{1}{u}$ à $F(x)$ et en déduire que F est nulle.

c. Justifier que la fonction $\varphi : t \mapsto \frac{\ln t}{1+t^2}$ admet une primitive Φ sur $\mathbb{R}_+^*$ et exprimer F en fonction de celle-ci.

En déduire que F est dérivable, calculer sa dérivée et retrouver le résultat précécent.

a. La fonction $\varphi : t \mapsto \frac{\ln t}{1+t^2}$ est définie et continue sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ donc par corollaire du théorème fondamental elle admet une primitive sur cet intervalle.

On pourrait poser par exemple $\Phi(x) = \displaystyle\int_1^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t$.

Soi $x \in \mathbb{R}_+^*$. Alors l'intervalle $\left[\frac{1}{x}, x\right]$ (ou $\left[x, \frac{1}{x}\right]$ si $x < 1$) est inclus dans $\mathbb{R}_+^*$, donc l'intégrale $F(x)$ est bien définie.

En effet, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est définie pour tout fonction f continue sur le segment $[a, b]$.

b. Posons $u = \frac{1}{t}$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $t \mapsto -\frac{1}{t^2}$, donc $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{t^2}$ puis $\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}u}{u^2}$. Par changement de variable :

$$F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{x}^{\frac{1}{x}} \frac{\ln \frac{1}{u}}{1+\frac{1}{u^2}} \left(-\frac{\mathrm{d}u}{u^2}\right) = -\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{\ln u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = -F(x).$$

Ceci montre : $\quad \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad F(x) = 0$.

c. Nous avons déjà justifié que la fonction φ admet une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit Φ une telle primitive.

Comme Φ est une primitive de φ alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{x} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \Big[\Phi(t)\Big]_{\frac{1}{x}}^{x} = \Phi(x) - \Phi\left(\frac{1}{x}\right).$$

La fonction Φ est dérivable car c'est une primitive. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ l'est aussi, donc par composition et somme la fonction F est dérivable. Sa dérivée est :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad F'(x) = \Phi'(x) + \tfrac{1}{x^2}\Phi'\left(\tfrac{1}{x}\right) = \varphi(x) + \tfrac{1}{x^2}\varphi\left(\tfrac{1}{x}\right)$$

On calcule :

$$F'(x) = \frac{\ln x}{1+x^2} + \frac{1}{x^2}\,\frac{\ln \frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} = 0$$

Comme $\mathbb{R}_+^*$ est un intervalle alors F est constante.

Comme $F(1) = 0$ alors F est nulle sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\boxed{8}$ On note F la primitive s'annulant en 0 de :

$$f : x \mapsto \frac{1}{1+\cos x}$$

a. Exprimer $F(x)$ à l'aide d'une intégrale, et préciser sur quel intervalle maximal elle est définie.

b. Calculer $F(x)$ en utilisant le changement de variable $t = \tan \frac{x}{2}$.
Exprimer le résultat en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.

a. $F(X) = \displaystyle\int_0^X \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x}$ sur l'intervalle $]-\pi, \pi[$

b. On obtient $F(x) = \tan \dfrac{x}{2} = \dfrac{\sin x}{1+\cos x}$

$\boxed{9}$ Soit N un entier naturel. Pour tout entier m tel que $0 \leqslant m \leqslant N$ on note :

$$I_m = \int_0^1 x^m (1-x)^{N-m} \,\mathrm{d}x$$

a. Calculer I_0.

b. Démontrer que pour tout $m \in \{0, \ldots, N-1\}$:

$$I_{m+1} = \frac{m+1}{N-m} I_m$$

c. En déduire une formule générale pour I_m et la démontrer par récurrence.
Vérifier cette formule pour I_N.

d. Donner pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ la valeur de :

$$\int_0^1 x^m (1-x)^n \,\mathrm{d}x$$

a. On obtient $I_0 = \dfrac{1}{N+1}$

b. On applique une intégration par parties.

c. On obtient :

$$\forall m \in \{0, \ldots, N-1\} \qquad I_m = \frac{1}{\binom{N}{m}} I_0 = \frac{1}{(N+1)\binom{N}{m}}$$

On démontre ce résultat par récurrence finie.

Il donne en particulier $I_N = I_0$, ce qui peut être vérifié directement.

d. En posant $n = N - m$ on obtient :

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2 \qquad \int_0^1 x^m (1-x)^n \,\mathrm{d}x = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}$$

$\boxed{10}$ Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose :

$$\Phi(x) = \int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t$$

a. Justifier que la fonction Φ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

b. Justifier que Φ est dérivable, et calculer sa dérivée.

a. Soit x un réel fixé.

La fonction f est continue donc par produit la fonction $t \mapsto (x-t)f(t)$ est continue sur l'intervalle $[0, x]$ (ou $[x, 0]$ si $x < 0$).

En conséquence l'intégrale $\int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t$ est définie.

Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction Φ est définie sur $\mathbb{R}$.

b. Méthode 1. Par linéarité :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \Phi(x) = x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t.$$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. Par produit la fonction $t \mapsto tf(t)$ est aussi continue sur $\mathbb{R}$.

D'après le théorème fondamental les fonctions $x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et $x \mapsto \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t$ sont des primitives respectives de f et de $t \mapsto tf(t)$.

Elles sont donc dérivables.

Par produit et somme la fonction Φ est dérivable, de dérivée :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \Phi'(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + xf(x) - xf(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

En conséquence Φ est une primitive d'une primitive de f.

Méthode 2. On utilise une intégration par parties.

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé, et pour tout $t \in \mathbb{R}$: $\quad u(t) = x - t$.

Soit $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. D'après le théorème fondamental, comme f est continue alors F est la primitive de f qui s'annule en 0.

Les fonctions u et F sont de classe $\mathscr{C}^1$ (car f est continue), donc par intégration par parties :

$$\begin{aligned}\Phi(x) = \int_0^x u(t)F'(t)\,\mathrm{d}t &= \Big[u(t)F(t)\Big]_0^x - \int_0^x (-1)F(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \Big[(x-t)F(t)\Big]_0^x + \int_0^x F(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Comme $F(0) = 0$ alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \Phi(x) = \int_0^x F(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ceci montre que Φ est une primitive d'une primitive de f.

Plus précisément Φ est la primitive qui s'annule en 0 de la primitive qui s'annule en 0 de f.