

Corrigé partiel du T. D. A5
Primitives

1 Calculer une primitive de chacune des fonctions suivantes.

$$\begin{aligned} f_2(x) &= \frac{1}{x^2 - 2x - 1} & f_4(x) &= \frac{x}{4x^2 + 4x + 1} \\ f_6(x) &= \frac{9}{x^2 - 9x} & f_8(x) &= \frac{1}{1 - 3x + \frac{9}{2}x^2} \end{aligned}$$

• Pour intégrer f_2 on décompose en éléments simples :

$$f_2(x) = \frac{1}{(x - 1 - \sqrt{2})(x - 1 + \sqrt{2})} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\frac{1}{x - 1 - \sqrt{2}} - \frac{1}{x - 1 + \sqrt{2}} \right]$$

Donc une primitive de f_2 est :

$$F_2(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x - 1 - \sqrt{2}}{x - 1 + \sqrt{2}} \right|$$

• Pour intégrer f_4 on fait apparaître la dérivée du dénominateur :

$$f_4(x) = \frac{x}{(2x + 1)^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{2x + 1}{(2x + 1)^2} - \frac{1}{(2x + 1)^2} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{2}{2x + 1} - \frac{2}{(2x + 1)^2} \right)$$

On en déduit une primitive de f_4 :

$$F_4(x) = \frac{1}{4} \left[\ln |2x + 1| + \frac{1}{2x + 1} \right]$$

• Pour intégrer f_6 on décompose en éléments simples :

$$f_6(x) = \frac{9}{x(x - 9)} = \frac{1}{x - 9} - \frac{1}{x}$$

Donc une primitive de f_6 est :

$$F_6(x) = \ln |x - 9| - \ln |x| = \ln \left| 1 - \frac{9}{x} \right|$$

- Pour intégrer f_8 on écrit la forme canonique du dénominateur :

$$f_8(x) = \frac{2}{9} \frac{1}{x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{2}{9}} = \frac{2}{9} \frac{1}{\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{9}} = \frac{2}{3} \frac{3}{(3x - 1)^2 + 1}$$

On reconnaît une forme $\frac{u'}{u^2+1}$, donc une primitive de f_8 est :

$$F_8(x) = \frac{2}{3} \arctan(3x - 1)$$

5 Déterminer, pour chacune des intégrales suivantes, quelle méthode permet de la calculer : primitives usuelles, manipulation d'expressions polynomiales et décomposition en éléments simples, linéarisation d'expressions trigonométriques, intégration par parties, changement de variable (dire lequel), autre.

$$I_1 = \int_0^4 \frac{2t}{t+2} dt$$

$$I_2 = \int_{-1}^1 \frac{3t-4}{(t-2)^2} dt$$

$$I_3 = \int_0^2 \frac{2t-1}{(t+1)^2} dt$$

$$I_4 = \int_0^1 \frac{t^2+t+1}{2t+1} dt$$

$$I_5 = \int_4^8 \frac{4dt}{t^2-4t+3}$$

$$I_6 = \int_a^{2a} \frac{dt}{t(t+a)} \quad a \neq 0$$

$$I_7 = \int_0^1 \frac{4t+1}{t^2+1} dt$$

$$I_8 = \int_2^{2\sqrt{3}} \frac{t^2}{t^2+4} dt$$

$$I_9 = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{8t dt}{(3t^2-2)^4}$$

$$I_{10} = \int_{-1}^0 \frac{t dt}{t^4-4}$$

$$I_{11} = \int_1^2 \frac{dt}{t(t^3+2)}$$

$$I_{12} = \int_0^1 \frac{t dt}{t^4-t^2-2}$$

$$I_{13} = \int_0^{\frac{1}{2}} t(2t-1)^8 dt$$

$$I_{14} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^4 t dt$$

$$I_{15} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\tan t)^2 dt$$

$$I_{16} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sin^2 t \cos^2 t dt$$

$$I_{17} = \int_0^{\pi} \frac{\sin t dt}{3+\sin^2 t}$$

$$I_{18} = \int_0^x t^3 e^{-t^2/2} dt$$

$$I_{19} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{2t} \cos 3t dt$$

$$I_{20} = \int_{-\ln 3}^{\ln 3} e^{-t} \operatorname{ch} t dt$$

$$I_{21} = \int_{-2}^2 t \operatorname{sh} t dt$$

$$I_{22} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 3t \cos 2t dt$$

$$I_{23} = \int_0^{\ln 2} \operatorname{ch} t \operatorname{sh} 2t dt$$

$$I_{24} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\left(t+\frac{\pi}{3}\right) \cos\left(t-\frac{\pi}{3}\right) dt$$

$$I_{25} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \arccos t dt$$

$$I_{26} = \int_0^A t^2 e^{-t} dt$$

$$I_{27} = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dt}{1+e^t}$$

$$I_{28} = \int_1^3 \frac{dt}{t\sqrt{t+1}}$$

$$I_{29} = \int_{\ln 2}^{2\ln 2} \frac{dt}{\sqrt{e^t-1}}$$

$$I_{30} = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{dt}{\cos t}$$

$$I_{31} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{t dt}{\cos^2 t}$$

$$I_{32} = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{t dt}{\cos t}$$

$$I_{33} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^3 t}{1+4\sin^2 t} dt$$

$$I_{34} = \int_0^{\ln 2} \frac{dt}{e^t-2-3e^{-t}}$$

$$I_{35} = \int_1^e \frac{\ln^n t dt}{t}$$

$$I_{36} = \int_0^{\frac{3}{4}} \sqrt{t^2+1} dt$$

$$I_{37} = \int_1^6 \frac{\ln(t^2+4)}{t^2} dt$$

$$I_{38} = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\arcsin t}{1-t^2}} dt$$

Calculer ensuite ces intégrales.

On pourra puiser dans la liste suivante de changements de variables utiles : $x = at + b$ avec (a, b) à déterminer, $x = t^2$, $x = t^3$, $x = \tan t$, $x = \cos t$, $x = e^t$, $x = \sqrt{t+1}$, $x = \sqrt{e^t-1}$, $t = \operatorname{sh} x \dots$

Méthodes :

I_1 : FR	I_2 : FR	I_3 : FR
I_4 : FR ou CV $x = 2t + 1$	I_5 : DES	I_6 : DES
I_7 : PU	I_8 : FR ou CV $t = 2x$	I_9 : PU ou CV $x = 3t^2 - 2$
I_{10} : CV $x = t^2$ puis DES	I_{11} : CV $x = t^3$	I_{12} : CV $x = t^2$ puis DES
I_{13} : IPP ou CV $x = 2t - 1$	I_{14} : CV $x = \tan t$	I_{15} : PU
I_{16} : Linéarisation	I_{17} : CV $x = \cos t$ puis DES	I_{18} : IPP
I_{19} : Complexes	I_{20} : PU	I_{21} : IPP
I_{22} : Linéarisation	I_{23} : PU ou linéarisation	I_{24} : Linéarisation
I_{25} : IPP	I_{26} : IPP	I_{27} : CV $x = e^t$
I_{28} : CV $x = \sqrt{t+1}$	I_{29} : CV $x = \sqrt{e^t - 1}$	I_{30} : CV $x = \sin t$
I_{31} : IPP	I_{32} : Parité	I_{33} : CV $x = 2 \sin t$
I_{34} : CV $x = e^t$ puis DES	I_{35} : PU	I_{36} : CV $t = \operatorname{sh} t$
I_{37} : IPP	I_{38} : PU	

Réponses :

$I_1 = 8 - 4 \ln 3$	$I_2 = \frac{4}{3} - 3 \ln 3$	$I_3 = 2 \ln 3 - 2$
$I_4 = \frac{1}{8}(3 \ln 3 + 4)$	$I_5 = 2 \ln \frac{15}{7}$	$I_6 = \frac{1}{a} \ln \frac{4}{3}$
$I_7 = 2 \ln 2 + \frac{\pi}{4}$	$I_8 = 2\sqrt{3} - 2 - \frac{\pi}{6}$	$I_9 = \frac{7}{16}$
$I_{10} = \frac{1}{8} \ln 3$	$I_{11} = \frac{1}{6} \ln \frac{12}{5}$	$I_{12} = -\frac{\ln 2}{3}$
$I_{13} = \frac{1}{360}$	$I_{14} = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}$	$I_{15} = 1 + \ln 2$
$I_{16} = \frac{3\pi}{32}$	$I_{17} = \frac{\ln 3}{2}$	$I_{18} = 2 - (x^2 + 2)e^{-x^2/2}$
$I_{19} = -\frac{2}{13}\left(e^{\frac{2\pi}{3}} + 1\right)$	$I_{20} = \frac{20}{9} + \ln 3$	$I_{21} = e^2 + 3e^{-2}$
$I_{22} = \frac{3}{10}$	$I_{23} = \frac{61}{96}$	$I_{24} = \frac{1}{4} - \frac{\pi}{16}$
$I_{25} = \frac{\pi}{2}$	$I_{26} = 2 - (A^2 + 2A + 2)e^{-A}$	$I_{27} = \ln \frac{9}{8}$
$I_{28} = \ln\left(1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$	$I_{29} = \frac{\pi}{6}$	$I_{30} = \ln 3$
$I_{31} = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$	$I_{32} = 0$	$I_{33} = \frac{5\pi - 3\sqrt{3}}{24}$
$I_{34} = -\frac{\ln 3}{4}$	$I_{35} = \frac{1}{n+1}$	$I_{36} = \frac{\ln 2}{2} + \frac{15}{32}$
$I_{37} = \frac{5}{6} \ln 5 - \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{\pi}{4}$	$I_{38} = \frac{\pi\sqrt{\pi}}{9\sqrt{6}}$	

- Pour le calcul de I_2 on peut appliquer le changement de variable $x = t - 2$, ou alors directement :

$$I_2 = \int_{-1}^1 \frac{3(t-2)+2}{(t-2)^2} dt = \int_{-1}^1 \frac{3}{t-2} + \frac{2}{(t-2)^2} dt = \left[3 \ln |t-2| - \frac{2}{t-2} \right]_{-1}^1 = \boxed{\frac{4}{3} - 3 \ln 3}$$

- Pour le calcul de I_3 on peut appliquer le changement de variable $x = t + 1$, ou alors directement :

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^2 \frac{2t-1}{(t+1)^2} dt = \int_0^2 \frac{2(t+1)-3}{(t+1)^2} dt = \int_0^2 \frac{2}{t+1} - \frac{3}{(t+1)^2} dt \\ &= \left[2 \ln |t+1| + \frac{3}{t+1} \right]_0^2 = \boxed{2 \ln 3 - 2} \end{aligned}$$

- Pour le calcul de I_4 on applique le changement de variable $x = 2t + 1$.

La fonction $t \mapsto 2t + 1$ est de classe \mathcal{C}^1 , $dx = 2dt$ et $t = \frac{x-1}{2}$ donc :

$$I_4 = \int_1^3 \left(\frac{1}{4} \frac{x^2+3}{x} \right) \frac{dx}{2} = \int_1^3 \frac{1}{8} \left(x + \frac{3}{x} \right) dx = \left[\frac{1}{8} \left(\frac{x^2}{2} + 3 \ln |x| \right) \right]_1^3 = \boxed{\frac{1}{8}(3 + 3 \ln 3)}$$

- Pour le calcul de I_5 on décompose la fonction rationnelle en éléments simples :

$$\frac{4}{t^2 - 4t + 3} = \frac{2}{t-3} - \frac{2}{t-1}$$

Ceci permet de calculer :

$$I_5 = \int_4^8 \frac{4dt}{t^2 - 4t + 3} = \int_4^8 \frac{2}{t-3} - \frac{2}{t-1} dt = \left[2 \ln |t-3| - 2 \ln |t-1| \right]_4^8 = \boxed{2 \ln \frac{15}{7}}$$

- Pour le calcul de I_6 on décompose en éléments simples :

$$\frac{1}{t(t+a)} = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+a} \right)$$

Ceci donne

$$I_6 = \int_a^{2a} \frac{dt}{t(t+a)} = \frac{1}{a} \int_a^{2a} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+a} \right) dt = \frac{1}{a} \left[\ln |t| - \ln |t+a| \right]_a^{2a} = \boxed{\frac{1}{a} \ln \frac{4}{3}}$$

- Pour le calcul de I_9 on reconnaît une primitive usuelle de la forme $u'u^\alpha$:

$$I_9 = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{8t dt}{(3t^2-2)^4} = \frac{8}{6} \int_1^{\sqrt{2}} 6t(3t^2-2)^{-4} dt = \frac{4}{3} \left[\frac{(3t^2-2)^{-3}}{-3} \right]_1^{\sqrt{2}} = \boxed{\frac{7}{16}}$$

- Pour le calcul de I_{10} on applique le changement de variable $x = t^2$.

La fonction $t \mapsto t^2$ est de classe \mathcal{C}^1 sur l'intervalle $[-1, 0]$, de dérivée $t \mapsto 2t$. Ceci donne $\frac{dx}{dt} = 2t$ puis $2t dt = dx$. Par changement de variable :

$$I_{10} = \int_{-1}^0 \frac{t dt}{t^4 - 4} = \int_1^0 \frac{1}{2} \frac{dx}{x^2 - 4}$$

On décompose la fonction rationnelle en éléments simples :

$$\frac{1}{x^2 - 4} = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{x - 2} - \frac{1}{x + 2} \right]$$

On en déduit :

$$I_{10} = \frac{1}{8} \int_1^0 \left(\frac{1}{x - 2} - \frac{1}{x + 2} \right) dx = \frac{1}{8} \left[\ln |x - 2| - \ln |x + 2| \right]_1^0 = \boxed{\frac{\ln 3}{8}}$$

- Pour le calcul de I_{12} on applique le changement de variable $x = t^2$.

La fonction $t \mapsto t^2$ est de classe \mathcal{C}^1 et $dx = 2t dt$ donc $t dt = \frac{dx}{2}$. Par changement de variable :

$$I_{12} = \int_0^1 \frac{1}{2} \frac{dx}{x^2 - x - 2} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dx}{(x - 2)(x + 1)}$$

Par décomposition en éléments simples :

$$I_{12} = \frac{1}{6} \int_0^1 \left(\frac{1}{x - 2} - \frac{1}{x + 1} \right) dx = \frac{1}{6} \left[\ln |x - 2| - \ln |x + 1| \right]_0^1 = \boxed{-\frac{\ln 2}{3}}$$

- Plusieurs méthodes sont possibles pour calculer I_{13} : intégration par parties, changement de variable $x = 2t - 1$, ou directement manipulation de polynômes, comme ci-dessous :

$$t(2t - 1)^8 = \frac{1}{2}(2t - 1 + 1)(2t - 1)^8 = \frac{1}{2}(2t - 1)^9 + \frac{1}{2}(2t - 1)^8$$

On en déduit :

$$I_{13} = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(2(2t - 1)^9 + 2(2t - 1)^8 \right) dt = \frac{1}{4} \left[\frac{(2t - 1)^{10}}{10} + \frac{(2t - 1)^9}{9} \right]_0^{\frac{1}{2}} = \boxed{\frac{1}{360}}$$

- Pour le calcul de I_{14} on applique le changement de variable $x = \tan t$.

La fonction $t \mapsto \tan t$ est de classe \mathcal{C}^1 sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, et $\frac{dx}{dt} = 1 + \tan^2 t = 1 + x^2$. On en déduit :

$$I_{14} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^4 t dt = \int_0^1 x^4 \frac{dx}{1 + x^2}$$

Il reste à manipuler la fonction rationnelle :

$$\frac{x^4}{1+x^2} = \frac{x^4 + x^2 - x^2 - 1 + 1}{1+x^2} = x^2 - 1 + \frac{1}{x^2 + 1}$$

On en déduit

$$I_{14} = \left[\frac{x^3}{3} - x + \arctan x \right]_0^1 = \boxed{\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}}$$

• Pour le calcul de I_{15} on fait apparaître des primitives usuelles :

$$\begin{aligned} I_{15} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan t)^2 dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan^2 t + 2 \tan t) dt \\ &= \left[\tan t - 2 \ln |\cos t| \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \boxed{1 + \ln 2} \end{aligned}$$

• Pour le calcul de I_{16} on linéarise l'expression trigonométrique, en utilisant les formules de trigonométrie ou les formules d'Euler.

$$\sin^2 t \cos^2 t = \left(\frac{\sin(2t)}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} \sin^2(2t) = \frac{1}{4} \frac{1 - \cos(4t)}{2}$$

Ceci donne :

$$I_{16} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 t \cos^2 t dt = \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos(4t)) dt = \frac{1}{8} \left[t - \frac{\sin(4t)}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \boxed{\frac{3\pi}{32}}$$

• Pour le calcul de I_{17} on applique le changement de variable $x = \cos t$.

La fonction $t \mapsto \cos t$ est de classe \mathcal{C}^1 sur l'intervalle $[0, \pi]$, de dérivée $\frac{dx}{dt} = -\sin t$ ce qui donne $dx = -\sin t dt$, et par changement de variable :

$$I_{17} = \int_0^{\pi} \frac{\sin t dt}{3 + \sin^2 t} = \int_1^{-1} \frac{-dx}{4 - x^2}$$

Par décomposition en éléments simples :

$$\begin{aligned} I_{17} &= \int_{-1}^1 \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2+x} + \frac{1}{2-x} \right) dx \\ &= \frac{1}{4} \left[\ln |2+x| - \ln |2-x| \right]_{-1}^1 = \boxed{\frac{\ln 3}{2}} \end{aligned}$$

• Pour le calcul de I_{18} on utilise une intégration par parties en posant $u'(t) = te^{-t^2/2}$ et $v(t) = t^2$. Alors $u(t) = -e^{-t^2/2}$ et $v'(t) = 2t$, les fonctions u et v sont de classe \mathcal{C}^1 et donc :

$$\begin{aligned} I_{18} &= \int_0^x t^3 e^{-t^2/2} dt = \left[-t^2 e^{-t^2/2} \right]_0^x + \int_0^x 2te^{-t^2/2} dt \\ &= -x^2 e^{-x^2/2} - 2 \left[e^{-t^2/2} \right]_0^x = \boxed{2 - (2+x^2)e^{-x^2/2}} \end{aligned}$$

- Pour le calcul de I_{19} on utilise les complexes :

$$I_{19} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{2t} \cos 3t \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{2t} \operatorname{Re}(e^{3it}) \, dt = \operatorname{Re} \left(\int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{(2+3i)t} \, dt \right)$$

On calcule :

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{(2+3i)t} \, dt = \left[\frac{e^{(2+3i)t}}{2+3i} \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{2-3i}{13} (e^{\frac{2\pi}{3}+i\pi} - 1) = -\frac{2-3i}{13} (e^{\frac{2\pi}{3}} + 1)$$

La partie réelle de ce complexe est :

$$I_{19} = -\frac{2(e^{\frac{2\pi}{3}} + 1)}{13}$$

- Pour le calcul de I_{20} on écrit $e^{-t} \operatorname{ch} t = \frac{1}{2}(1 + e^{-2t})$ puis :

$$I_{20} = \int_{-\ln 3}^{\ln 3} e^{-t} \operatorname{ch} t \, dt = \frac{1}{2} \int_{-\ln 3}^{\ln 3} (1 + e^{-2t}) \, dt = \frac{1}{2} \left[t - \frac{e^{-2t}}{2} \right]_{-\ln 3}^{\ln 3} = \frac{20}{9} + \ln 3$$

- Pour le calcul de I_{21} on utilise une intégration par parties.

On pose $u(t) = t$ et $v(t) = \operatorname{ch} t$. Alors u et v sont de classe \mathcal{C}^1 , de dérivées $u'(t) = 1$ et $v'(t) = \operatorname{sh} t$. En intégrant par parties :

$$\begin{aligned} I_{21} &= \int_{-2}^2 t \operatorname{sh} t \, dt = \left[t \operatorname{ch} t \right]_{-2}^2 - \int_{-2}^2 \operatorname{ch} t \, dt \\ &= \left[t \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t \right]_{-2}^2 = 4 \operatorname{ch} 2 - 2 \operatorname{sh} 2 = e^2 + 3e^{-2} \end{aligned}$$

- Pour le calcul de I_{22} on linéarise l'expression trigonométrique grâce aux formules d'Euler :

$$\sin 3t \cos 2t = \frac{(e^{i3t} - e^{-i3t})}{2i} \frac{(e^{i2t} + e^{-i2t})}{2} = \frac{e^{i5t} + e^{it} - e^{-it} - e^{-5it}}{4i} = \frac{1}{2} (\sin 5t + \sin t)$$

Ceci donne :

$$I_{22} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 3t \cos 2t \, dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 5t + \sin t) \, dt = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{5} \cos 5t - \cos t \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{3}{10}$$

- Pour le calcul de I_{23} on pourrait linéariser l'expression hyperbolique, mais on peut aussi utiliser la formule $\operatorname{sh} 2t = 2 \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t$, puis reconnaître une formule de type $u'u^2$:

$$I_{23} = \int_0^{\ln 2} \operatorname{ch} t \operatorname{sh} 2t \, dt = \int_0^{\ln 2} 2 \operatorname{sh} t \operatorname{ch}^2 t \, dt = \left[\frac{2}{3} \operatorname{ch}^3 t \right]_0^{\ln 2} = \frac{61}{96}$$

- Pour le calcul de I_{24} on utilise une formule de transformation de produit en somme :

$$\begin{aligned} I_{24} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\left(t + \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(t - \frac{\pi}{3}\right) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\cos(2t) + \cos\frac{2\pi}{3}\right) dt = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(2t)}{2} - \frac{t}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \boxed{\frac{1}{4} - \frac{\pi}{16}} \end{aligned}$$

- Pour le calcul de I_{25} on intègre par parties, en posant $u(t) = t$ et $v(t) = \arccos t$. Ces deux fonctions sont de classe \mathcal{C}^1 sur l'intervalle $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, de dérivées $u'(t) = 1$ et $v'(t) = \frac{-1}{\sqrt{1-t^2}}$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} I_{25} &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (1 \times \arccos t) dt = \left[t \arccos t \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt \\ &= \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{6} - \frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (-2t)(1-t^2)^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \left[2\sqrt{1-t^2} \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \boxed{\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

- Pour le calcul de I_{26} on utilise deux intégrations par parties successives.

On pose $u(t) = t^2$ et $v(t) = -e^{-t}$. Alors les fonctions u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur l'intervalle $[0, A]$ (ou $[A, 0]$ si $A < 0$), de dérivées $u'(t) = 2t$ et $v'(t) = e^{-t}$. Par intégration par parties :

$$I_{26} = \int_0^A t^2 e^{-t} dt = \left[-t^2 e^{-t} \right]_0^A + \int_0^A 2te^{-t} dt$$

On pose alors (indépendamment du calcul précédent) $u(t) = 2t$ et $v(t) = -e^{-t}$. Alors u et v sont de classe \mathcal{C}^1 , de dérivées $u'(t) = 2$ et $v'(t) = e^{-t}$. Par intégration par parties :

$$I_{26} = \left[-t^2 e^{-t} \right]_0^A + \left[-2te^{-t} \right]_0^A + \int_0^A 2e^{-t} dt$$

Ceci donne :

$$I_{26} = \left[-t^2 e^{-t} - 2te^{-t} - 2e^{-t} \right]_0^A = \boxed{2 - (A^2 + 2A + 2)e^{-A}}$$

- Pour le calcul de I_{27} on utilise le changement de variable $x = e^t$, même si $x = e^{-t}$ conviendrait mieux.

La fonction $t \mapsto e^t$ est de classe \mathcal{C}^1 sur l'intervalle $[\ln 2, \ln 3]$, sa dérivée est $\frac{dx}{dt} = e^t = x$.

Ainsi $dt = \frac{dx}{x}$ et par changement de variable :

$$I_{27} = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dt}{1 + e^t} = \int_2^3 \frac{dx}{x(1+x)}$$

On décompose la fonction rationnelle en éléments simples :

$$I_{27} = \int_2^3 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} \right) dx = \left[\ln|x| - \ln|1+x| \right]_2^3 = \boxed{2 \ln 3 - 3 \ln 2 = \ln \frac{9}{8}}$$

- Pour le calcul de I_{28} on utilise le changement de variable $x = \sqrt{t+1}$, qui donne $t = x^2 - 1$.

La fonction $t \mapsto \sqrt{t+1}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur le segment $[1, 3]$, de dérivée $t \mapsto \frac{1}{2\sqrt{t+1}} = \frac{1}{2x}$, donc $dt = 2x dx$ puis par changement de variable :

$$I_{28} = \int_1^3 \frac{dt}{t\sqrt{t+1}} = \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{2x dx}{(x^2-1)x} = \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{2 dx}{(x-1)(x+1)}$$

Par décomposition en éléments simples :

$$I_{28} = \int_{\sqrt{2}}^2 \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \left[\ln|x-1| - \ln|x+1| \right]_{\sqrt{2}}^2 = \boxed{\ln \left(1 + \frac{2\sqrt{2}}{3} \right)}$$

- Pour le calcul de I_{29} on utilise le changement de variable $x = \sqrt{e^t - 1}$.

La fonction $t \mapsto \sqrt{e^t - 1}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur l'intervalle $[\ln 2, 2 \ln 2]$ car $t + 1 > 0$ sur ce segment. Sa dérivée est $\frac{dx}{dt} = \frac{e^t}{2\sqrt{e^t-1}} = \frac{x^2+1}{2x}$, donc $dt = \frac{2x dx}{x^2+1}$. Par changement de variable :

$$I_{29} = \int_{\ln 2}^{2 \ln 2} \frac{dt}{\sqrt{e^t - 1}} = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2 dx}{x^2 + 1}$$

On en déduit :

$$I_{29} = 2 \left[\arctan x \right]_1^{\sqrt{3}} = \boxed{\frac{\pi}{6}}$$

- Pour le calcul de I_{30} on commence par écrire :

$$I_{30} = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{dt}{\cos t} = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos t dt}{1 - \sin^2 t}$$

On applique ensuite le changement de variable $x = \sin t$.

La fonction $t \mapsto \sin t$ est de classe \mathcal{C}^1 sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$ et sa dérivée est $\frac{dx}{dt} = \cos t$, ce qui montre que $dx = \cos t dt$.

Par changement de variable :

$$I_{30} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1-x^2}$$

On décompose en éléments simples :

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right]$$

Puis on calcule :

$$I_{30} = \frac{1}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{1+x} - \frac{-1}{1-x} \right) dx = \frac{1}{2} \left[\ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \boxed{\ln 3}$$

- L'intégrale I_{31} se calcule par intégration par parties.

Soit $u(t) = t$ et $v'(t) = \frac{1}{\cos^2 t}$ puis $u'(t) = 1$ et $v(t) = \tan t$.

Les fonctions u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, par intégration par parties :

$$I_{31} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{t dt}{\cos^2 t} = \left[t \tan t \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan t dt = \frac{\pi}{4} + \left[\ln |\cos t| \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \boxed{\frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}}$$

- L'intégrale $I_{32} = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{t dt}{\cos t}$ est nulle car la fonction $t \mapsto \frac{t}{\cos t}$ est impaire.

Pour démontrer ceci on applique le changement de variable $x = -t$.

La fonction $x \mapsto -x$ est de classe \mathcal{C}^1 et $\frac{dt}{dx} = -1$, d'où $dt = -dx$ puis par changement de variable :

$$I_{32} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{-\frac{\pi}{6}} \frac{-x dx}{\cos(-x)} = - \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{x dx}{\cos x} = -I_{32}$$

Ceci donne comme annoncé : $\boxed{I_{32} = 0}$

- Pour le calcul de I_{33} on utilise le changement de variable $x = 2 \sin t$.

La fonction $t \mapsto 2 \sin t$ est de classe \mathcal{C}^1 , de dérivée $\frac{dx}{dt} = 2 \cos t$, donc $dx = 2 \cos t dt$.

Par changement de variable :

$$I_{33} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^3 t dt}{1 + 4 \sin^2 t} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(1 - \sin^2 t) \cos t dt}{1 + (2 \sin t)^2} = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{\left(1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2\right) \frac{dx}{2}}{1 + x^2}$$

On calcule :

$$I_{33} = \frac{1}{8} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{4 - x^2}{1 + x^2} dx = \frac{1}{8} \int_0^{\sqrt{3}} \left(\frac{5}{1 + x^2} - 1 \right) dx = \frac{1}{8} \left[5 \arctan x - x \right]_0^{\sqrt{3}} = \boxed{\frac{5\pi}{24} - \frac{\sqrt{3}}{8}}$$

- Pour le calcul de I_{34} on utilise le changement de variable $x = e^t$.

La fonction $t \mapsto e^t$ est de classe \mathcal{C}^1 , sa dérivée est $\frac{dx}{dt} = e^t = x$, donc $dt = \frac{dx}{x}$.

Par changement de variable :

$$I_{34} = \int_0^{\ln 2} \frac{dt}{e^t - 2 - 3e^{-t}} = \int_1^2 \frac{dx}{x(x - 2 - \frac{3}{x})} = \int_1^2 \frac{dx}{x^2 - 2x + 3}$$

On décompose en éléments simples :

$$\frac{1}{x^2 - 2x + 3} = \frac{1}{(x - 3)(x + 1)} = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{x - 3} - \frac{1}{x + 1} \right]$$

On en déduit :

$$I_{34} = \frac{1}{4} \int_1^2 \left(\frac{1}{x - 3} - \frac{1}{x + 1} \right) dx = \frac{1}{4} \left[\ln |x - 3| - \ln |x + 1| \right]_1^2 = \boxed{-\frac{\ln 3}{4}}$$

• Pour le calcul de I_{35} on reconnaît la forme $u'u^n$:

$$I_{35} = \int_1^e \frac{\ln^n t}{t} dt = \int_1^e \frac{1}{t} (\ln t)^n dt = \left[\frac{\ln^{n+1} t}{n+1} \right]_1^e = \boxed{\frac{1}{n+1}}$$

• Pour le calcul de I_{36} on utilise le changement de variable $t = \operatorname{sh} x$.

La fonction $x \mapsto \operatorname{sh} x$ est de classe \mathcal{C}^1 , de dérivée $\frac{dt}{dx} = \operatorname{ch} x$.

Elle est bijective de \mathbb{R} dans \mathbb{R} donc 2 admet un unique antécédent que l'on note α : $\operatorname{sh} \alpha = \frac{3}{4}$.

Par changement de variable :

$$I_{36} = \int_0^{\frac{3}{4}} \sqrt{t^2 + 1} dt = \int_0^\alpha \sqrt{\operatorname{sh}^2 x + 1} \operatorname{ch} x dx = \int_0^\alpha |\operatorname{ch} x| \operatorname{ch} x dx$$

Comme $\operatorname{ch} x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ alors $|\operatorname{ch} x| = \operatorname{ch} x$.

On calcule : $\operatorname{ch}^2 x = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x + 1)$, donc :

$$I_{36} = \frac{1}{2} \int_0^\alpha (1 + \operatorname{ch} 2x) dx = \frac{1}{2} \left[x + \frac{\operatorname{sh} 2x}{2} \right]_0^\alpha = \frac{1}{2} \left(\alpha + \frac{\operatorname{sh} 2\alpha}{2} \right)$$

On calcule α en résolvant l'équation $\operatorname{sh} \alpha = \frac{3}{4}$.

Celle-ci donne $X^2 - \frac{3}{2}X - 1 = 0$ en posant $X = e^\alpha$, donc $X = 2$ ou $X = -\frac{1}{2}$. Comme X est strictement positif alors $X = 2$ et $\alpha = \ln 2$.

Ceci donne $\operatorname{sh} 2\alpha = \frac{15}{8}$, puis $I_{36} = \frac{\ln 2}{2} + \frac{15}{32}$.

- Pour le calcul de I_{37} on utilise une intégration par parties.

Pour tout $t \in [1, 6]$, soit $u(t) = \ln(t^2 + 4)$ et $v(t) = -\frac{1}{t}$.

Ces fonctions sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[1, 6]$, de dérivées $u'(t) = \frac{2t}{t^2+4}$ et $v'(t) = \frac{1}{t^2}$.

Par intégration par parties :

$$I_{37} = \int_1^6 \frac{\ln(t^2 + 4)}{t^2} dt = \left[-\frac{\ln(t^2 + 4)}{t} \right]_1^6 + \int_1^6 \frac{2}{t^2 + 4} dt$$

On obtient :

$$\begin{aligned} I_{37} &= -\frac{\ln 40}{6} + \ln 5 + \int_1^6 \frac{\frac{1}{2}}{1 + \left(\frac{t}{2}\right)^2} dt = \frac{5}{6} \ln 5 - \frac{1}{6} \ln 8 + \left[\arctan \frac{t}{2} \right]_1^6 \\ &= \frac{5}{6} \ln 5 - \frac{1}{2} \ln 2 + \left(\arctan 3 - \arctan \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

On peut remarquer que :

$$\tan \left(\arctan 3 - \arctan \frac{1}{2} \right) = 1 \quad \text{avec} \quad -\frac{\pi}{2} < \arctan 3 - \arctan \frac{1}{2} < \frac{\pi}{2}$$

donc $\left(\arctan 3 - \arctan \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{4}$ et enfin :

$$I_{37} = \frac{5 \ln 5}{6} - \frac{\ln 2}{2} + \frac{\pi}{4}$$

- Pour le calcul de I_{38} on remarque une primitive usuelle $u'u^\alpha$:

$$I_{38} = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\arcsin t}{1-t^2}} dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} (\arcsin t)^{\frac{1}{2}} dt$$

On en déduit :

$$I_{38} = \left[\frac{\arcsin^{\frac{3}{2}} t}{\frac{3}{2}} \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \left(\frac{\pi}{6} \right)^{\frac{3}{2}} = \frac{\pi \sqrt{\pi}}{9\sqrt{6}}$$

6 Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on pose $F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\ln t}{1+t^2} dt$.

a. Justifier que la fonction $\varphi : t \mapsto \frac{\ln t}{1+t^2}$ admet une primitive Φ sur \mathbb{R}_+^* .

En déduire que F est bien définie.

b. Démontrer que F est dérivable et calculer sa dérivée. Que peut-on en déduire ?

c. Appliquer le changement de variable $t = \frac{1}{u}$ à $F(x)$ et retrouver le résultat précédent.

a. La fonction φ est définie et continue sur l'intervalle \mathbb{R}_+^* donc d'après le théorème fondamental elle admet une primitive sur cet intervalle.

On pourrait poser par exemple $\Phi(x) = \int_1^x \varphi(t) dt$.

Soi $x \in \mathbb{R}_+^*$. Alors l'intervalle $[\frac{1}{x}, x]$ (ou $[x, \frac{1}{x}]$ si $x < 1$) est inclus dans \mathbb{R}_+^* , donc l'intégrale $F(x)$ est bien définie.

En effet, l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est définie pour tout fonction f continue sur le segment $[a, b]$.

b. Comme Φ est une primitive de φ alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^x \varphi(t) dt = \left[\Phi(t) \right]_{\frac{1}{x}}^x = \Phi(x) - \Phi\left(\frac{1}{x}\right).$$

La fonction Φ est dérivable car c'est une primitive. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ l'est aussi, donc par composition et somme la fonction F est dérivable. Sa dérivée est :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad F'(x) = \Phi'(x) + \frac{1}{x^2} \Phi'\left(\frac{1}{x}\right) = \varphi(x) + \frac{1}{x^2} \varphi\left(\frac{1}{x}\right)$$

On calcule :

$$F(x) = \frac{\ln x}{1+x^2} + \frac{1}{x^2} \frac{\ln \frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} = 0$$

Comme \mathbb{R}_+^* est un intervalle alors F est constante.

Comme $F(1) = 0$ alors F est nulle sur \mathbb{R}_+^* .

c. Posons $u = \frac{1}{t}$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* , de dérivée $t \mapsto -\frac{1}{t^2}$, donc $\frac{du}{dt} = -\frac{1}{t^2}$ puis $dt = -\frac{du}{u^2}$. Par changement de variable :

$$F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\ln t}{1+t^2} dt = \int_x^{\frac{1}{x}} \frac{\ln \frac{1}{u}}{1+\frac{1}{u^2}} \left(-\frac{du}{u^2}\right) = -\int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\ln u}{1+u^2} du = -F(x).$$

Ceci montre : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad F(x) = 0$.

7 Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note :

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$$

a. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

En déduire que la suite (I_n) converge.

b. Calculer $I_{n-1} + I_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

c. Déterminer la limite de la suite :

$$u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$$

a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme :

$$\forall t \in [0, 1] \quad 0 \leq \frac{t^n}{1+t} \leq t^n$$

Alors par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^1 0 dt \leq \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \leq \int_0^1 t^n dt.$$

Ceci donne :

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par linéarité :

$$I_{n-1} + I_n = \int_0^1 \frac{t^{n-1} + t^n}{1+t} dt = \int_0^1 t^{n-1} dt = \frac{1}{n}.$$

c. Par définition de u_n :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{1}{k}.$$

D'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} (I_{k-1} + I_k).$$

Par télescopage :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} I_{k-1} + \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} I_k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k I_k - \sum_{k=1}^n (-1)^k I_k = I_0 - (-1)^n I_n. \end{aligned}$$

Comme la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0 alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers I_0 :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = I_0 = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \left[\ln |1+t| \right]_0^1 = \boxed{\ln 2}$$

8 On note F et G les primitives s'annulant en 0 des fonctions :

$$f : x \mapsto \frac{1}{1 + \cos x} \quad \text{et} \quad g : x \mapsto \frac{1}{1 + \sin x}$$

- Exprimer les fonctions F et G à l'aide d'intégrales, et préciser sur quels intervalles maximaux elles sont définies.
- Calculer $F(x)$ en utilisant le changement de variable $t = \tan \frac{x}{2}$.
Exprimer le résultat en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.
- Expliciter de même $G(x)$.

$$\text{a. } F(X) = \int_0^X \frac{dx}{1 + \cos x} \quad \text{sur }]-\pi, \pi[\qquad G(X) = \int_0^X \frac{dx}{1 + \sin x} \quad \text{sur }]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$$

$$\text{b. On obtient : } F(x) = \tan \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

- Attention le changement de variable $t = \tan \frac{x}{2}$ n'est possible que sur $]-\frac{\pi}{2}, \pi[$. Il est plus efficace d'utiliser $u = x - \frac{\pi}{2}$.

$$\text{On obtient : } G(x) = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan \frac{x}{2}} = 1 - \frac{\cos x}{1 + \sin x}.$$

9 Soit f une fonction continue sur \mathbb{R} . Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose :

$$\Phi(x) = \int_0^x (x - t)f(t) dt$$

- Justifier que la fonction Φ est bien définie sur \mathbb{R} .
- Justifier que Φ est dérivable, et calculer sa dérivée.

- Soit x un réel fixé.

La fonction f est continue donc par produit la fonction $t \mapsto (x - t)f(t)$ est continue sur l'intervalle $[0, x]$ (ou $[x, 0]$ si $x < 0$).

En conséquence l'intégrale $\int_0^x (x - t)f(t) dt$ est définie.

Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction Φ est définie sur \mathbb{R} .

- Méthode 1. Par linéarité :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \Phi(x) = x \int_0^x f(t) dt + \int_0^x tf(t) dt.$$

La fonction f est continue sur \mathbb{R} . Par produit la fonction $t \mapsto tf(t)$ est aussi continue sur \mathbb{R} .

D'après le théorème fondamental les fonctions $x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ et $x \mapsto \int_0^x tf(t) dt$ sont des primitives respectives de f et de $t \mapsto tf(t)$.

Elles sont donc dérivables.

Par produit et somme la fonction Φ est dérivable, de dérivée :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \Phi'(x) = \int_0^x f(t) dt + xf(x) - xf(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

En conséquence Φ est une primitive d'une primitive de f .

Méthode 2. On utilise une intégration par parties.

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé, et pour tout $t \in \mathbb{R}$: $u(t) = x - t$.

Soit $F(x) = \int_0^x f(t) dt$. D'après le théorème fondamental, comme f est continue alors F est la primitive de f qui s'annule en 0.

Les fonctions u et F sont de classe \mathcal{C}^1 (car f est continue), donc par intégration par parties :

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \int_0^x u(t)F'(t) dt = \left[u(t)F(t) \right]_0^x - \int_0^x (-1)F(t) dt \\ &= \left[(x-t)F(t) \right]_0^x + \int_0^x F(t) dt\end{aligned}$$

Comme $F(0) = 0$ alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \Phi(x) = \int_0^x F(t) dt.$$

Ceci montre que Φ est une primitive d'une primitive de f .

Plus précisément Φ est la primitive qui s'annule en 0 de la primitive qui s'annule en 0 de f .