Corrigé partiel du T. D. B3
Logique

10 Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Écrire à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes ainsi que leurs négations.

a. f est l'identité de $\mathbb{R}$.

b. f admet un point fixe.

c. f est monotone.

d. f est injective.

e. f est surjective.

a. $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x$ non a. $\exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) \neq x$

b. $\exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x$ non b. $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \neq x$

c. $(\forall (x, x') \in \mathbb{R}^2 \quad (x \leqslant x' \implies f(x) \leqslant f(x')))$

ou $(\forall (x, x') \in \mathbb{R}^2 \quad (x \leqslant x' \implies f(x) \geqslant f(x')))$

non c. $\exists (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \quad (a \leqslant b \text{ et } c \leqslant d \text{ et } f(a) > f(b) \text{ et } f(c) < f(d))$

d. $\forall (x, x') \in \mathbb{R}^2 \quad (f(x) = f(x') \implies x = x')$

non d. $\exists (x, x') \in \mathbb{R}^2 \quad (f(x) = f(x') \text{ et } x \neq x')$

e. $\forall y \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) = y$ non e. $\exists y \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \neq y$

12 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction.
Démontrer que si $f \circ f$ est croissante et $f \circ f \circ f$ est strictement décroissante, alors f est strictement décroissante.

On raisonne par l'absurde.
Supposons que $f \circ f$ est croissante et $f \circ f \circ f$ est strictement décroissante.
On souhaite démontrer que f est strictement décroissante, donc que :

$$\forall (x, x') \in \mathbb{R}^2 \qquad (x < x' \quad \implies \quad f(x) > f(x'))$$

Supposons que f n'est pas strictement croissante, donc que :

$$\exists (x, x') \in \mathbb{R}^2 \qquad (x < x' \quad \text{et} \quad f(x) \leqslant f(x'))$$

Soit (x, x') un tel couple de réels.
Comme $x < x'$ et $f \circ f \circ f$ est strictement décroissante alors :

$$f \circ f \circ f(x) > f \circ f \circ f(x')$$

Comme $f(x) \leqslant f(x')$ et $f \circ f$ est croissante alors :

$$f \circ f \circ f(x) \leqslant f \circ f \circ f(x')$$

On ne peut avoir à la fois $f \circ f \circ f(x) > f \circ f \circ f(x')$ et $f \circ f \circ f(x) \leqslant f \circ f \circ f(x')$.
Cette contradiction montre que f est strictement décroissante.

16 Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+2} = \frac{u_{n+1}^3}{u_n^2}$$

On remarque que $u_0 = 2^0$, $u_1 = 2^1$, $u_2 = 2^3$, $u_3 = 2^7$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ notons $\mathcal{P}_n$ la proposition : $u_n = 2^{2^n-1}$.
On démontre par récurrence double que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Initialisation. Les propositions $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$ sont vraies.
Hérédité. Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$ les propositions $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ sont vraies.
Alors par définition de la suite (u_n) :

$$u_{n+2} = \frac{u_{n+1}^3}{u_n^2}$$

Les hypothèses de récurrence montrent que :

$$u_{n+2} = \frac{2^{3(2^{n+1}-1)}}{2^{2(2^n-1)}} = 2^{6\times 2^n - 3 - 2\times 2^n + 2} = 2^{2^{n+2}-1}$$

La proposition $\mathcal{P}_{n+2}$ est donc vraie.
L'hérédité est démontrée.
Conclusion. Par récurrence double la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc le terme général de la suite (u_n) est :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = 2^{2^n-1}$$

18 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \sum_{k=1}^{n} u_k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right)^2$$

Démontrer que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = n$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ notons $\mathcal{P}_n$ la proposition : $u_n = n$.

On démontre par récurrence forte que cette proposition est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation. On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right)^2$.

Pour $n = 1$ cette égalité donne $u_1^3 = u_1^2$.

Comme u_1 est non-nul car strictement positif : $u_1 = 1$.

La proposition $\mathcal{P}_1$ est donc vraie.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On suppose que les propositions $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_{n-1}$ sont toutes vraies, et on démontre que la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie.

L'égalité de l'énoncé donne :

$$\left(\sum_{k=1}^{n-1} u_k^3\right) + u_n^3 = \left(\left(\sum_{k=1}^{n-1} u_k\right) + u_n\right)^2$$

Par hypothèses de récurrence : $\quad \forall k = 1, \ldots, n-1 \quad u_k = k$.

On en déduit :

$$\left(\sum_{k=1}^{n-1} k^3\right) + u_n^3 = \left(\left(\sum_{k=1}^{n-1} k\right) + u_n\right)^2$$

Les formules pour la somme des premiers entiers et la somme de premiers cubes donnent :

$$\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2 + u_n^3 = \left(\frac{n(n-1)}{2} + u_n\right)^2$$

En développant :

$$u_n^3 = u_n^2 + n(n-1)u_n$$

Comme u_n est non-nul :

$$u_n^2 - u_n - n(n-1) = 0$$

Les racines de cette équation du second degré sont n et $1 - n$. Comme u_n est strictement positif alors $u_n = n$.

La proposition $\mathcal{P}_n$ est donc vraie, et l'hérédité est démontrée.

Conclusion. Par récurrence forte la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = n$$

19 Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ qui vérifient :

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2 \quad f(m+n) = f(m)f(n)$$

Analyse. La fonction nulle $n \mapsto 0$ est solution.

Supposons que f n'est pas la fonction nulle.

Il existe alors $n \in \mathbb{N}$ tel que $f(n) \neq 0$. Pour $m = 0$ on obtient $f(n) = f(0)f(n)$, ce qui montre que $f(0) = 1$.

Posons $a = f(1)$. On démontre alors par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad f(n) = a^n$.

Synthèse. Supposons qu'il existe $a \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad f(n) = a^n$.

Alors pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$: $f(m+n) = a^{m+n} = a^m a^n = f(m)f(n)$.

Ainsi la fonction f est bien solution du problème.

Finalement les solutions sont les fonctions $a \mapsto a^n$ où a est un entier naturel, éventuellement nul.

21 Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifient :

a. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x)f(y) - f(xy) = x + y$

b. $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) + xf(1-x) = 1 + x$

c. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x - f(y)) = 2 - x - y$

a. Analyse. Supposons que f est une fonction solution.
Pour $x = y = 0$ on obtient $f(0)^2 - f(0) = 0$, donc $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.
Pour $x = 0$ et $y = 1$ on obtient $f(0)(f(1) - 1) = 1$, donc $f(0) \neq 0$, et $f(0) = 1$.
Pour x quelconque et $y = 0$ on obtient $f(x) - 1 = x$, donc $f(x) = x + 1$.
Synthèse. Soit $f(x) = x + 1$. Alors pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$f(x)f(y) - f(xy) = (x+1)(y+1) - xy - 1 = x + y$$

Ainsi la fonction $x \mapsto x + 1$ est solution unique du problème.

b. Analyse. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction solution du problème, *i.e.*, vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) + xf(1-x) = 1 + x \tag{1}$$

Si x est un réel alors $1 - x$ est un réel et donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(1-x) + (1-x)f(x) = 1 + (1-x) = 2 - x$$

En multipliant par x :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad (x - x^2)f(x) + xf(1-x) = 2x - x^2 \tag{2}$$

Par soustraction des égalités (1) et (2) :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad (1 - x + x^2)f(x) = 1 - x + x^2$$

Pour tout réel x le trinôme $x^2 - x + 1$ est non-nul (car de discriminant strictement négatif), donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = 1$$

La fonction constante égale à 1 est donc la seule solution possible du problème.
Synthèse. Soit $f(x) = 1$. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) + xf(1-x) = 1 + x$$

Ceci montre que la fonction $f : x \mapsto 1$ est bien solution du problème.
Finalement l'unique solution est la fonction constante égale à 1.

c. Analyse. Soit f une fonction solution du problème, c'est-à-dire une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x - f(y)) = 2 - x - y$$

Soit y un réel quelconque. Soit $x = y + f(y)$. Alors $x - f(y) = y$ et donc :

$$f(y) = 2 - y - f(y) - y \qquad \text{puis} \qquad f(y) = 1 - y$$

Ainsi la fonction $t \mapsto 1 - t$ est la seule solution possible du problème.
Synthèse. Soit $f : t \mapsto 1 - t$. Alors :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x - f(y)) = 1 - (x - (1 - y)) = 2 - x - y$$

La fonction f est bien solution du problème.
Finalement l'unique solution est la fonction $t \mapsto 1 - t$.