Devoir à la maison n° 5
CORRIGÉ

Exercice 1.

1. Les primitives de f_1 sont les $\arctan + c,\ c \in \mathbb{R}$. Comme $\arctan$ s'annule en 0, on a donc : $F_1 = \arctan$.
2. On pose $x = \tan t$. Alors $dx = (1+\tan^2 t)dt = (1+x^2)dt$, donc :
$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} &= \int \frac{dt}{1+\tan^2 t}\\ &= \int \cos^2 t dt\\ &= \int \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2t)\right) dt\\ &= \frac{t}{2}+\frac{\sin(2t)}{4}+c\\ &= \frac{1}{2}\arctan(x)+\frac{1}{4}\sin(2\arctan(x))+c,\end{aligned}$$
avec $c = 0$ pour F_2 et :
$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(2\arctan(x)) &= \tan(2\arctan(x))\cos(2\arctan(x))\\ &= \frac{2\tan(\arctan(x))}{1-\tan^2(\arctan(x))}(2\cos^2(\arctan(x))-1)\\ &= \frac{2x}{1-x^2}\left(\frac{2}{1+x^2}-1\right)\\ &= \frac{2x}{1+x^2},\end{aligned}$$
donc : $F_2 : x \mapsto \frac{1}{2}\arctan(x)+\frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2}$.
3. La fonction f_n est usuellement dérivable sur $\mathbb{R}$, avec : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n'(x) = -\frac{2nx}{(1+x^2)^{n+1}}$, donc par intégration par parties :
$$\begin{aligned}F_n &= \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}\\ &= \frac{x}{(1+x^2)^n}+\int \frac{2nx^2}{(1+x^2)^{n+1}}dx\\ &= \frac{x}{(1+x^2)^n}+2n(F_n-F_{n+1}).\end{aligned}$$
Donc : $2nF_{n+1} = \frac{x}{(1+x^2)^n}+(2n-1)F_n$.

4. D'après le résultat précédent : $4F_3 = \dfrac{x}{(1+x^2)^2} + 3F_2$. Donc :

$$F_3 : x \mapsto \frac{1}{4}\frac{x}{(1+x^2)^2} + \frac{3}{8}\frac{x}{1+x^2} + \frac{3}{8}\arctan(x).$$

Exercice 2.

1. L'équation (E) est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 lorsque $x \neq 0$. Il faut donc l'étudier sur $I_1 = \mathbb{R}_-^*$ ou sur $I_2 = \mathbb{R}_+^*$.
2. Notons $I = I_1$ ou I_2. Sur I, l'équation s'écrit :

$$y' - \frac{1}{x}y = 1.$$

   L'équation homogène associée $y_h' - \dfrac{1}{x}y_h = 0$, d'inconnue $y_h : I \to \mathbb{R}$, a pour coefficient $a : x \mapsto -\dfrac{1}{x}$, de primitive $A : x \mapsto -\ln|x|$, donc a pour solutions les $y_h : x \mapsto \lambda e^{\ln|x|} = \lambda|x|$, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire les $y_h : x \mapsto \tilde{\lambda}x$, pour $\tilde{\lambda} \in \mathbb{R}$ (avec $\tilde{\lambda} = -\lambda$ sur I_1 et $\tilde{\lambda} = \lambda$ sur I_2).
   D'après la méthode de variation de la constante, une solution particulière $y_p : I \to \mathbb{R}$ est de la forme $y_p : x \mapsto \tilde{\lambda}(x)x$ avec $\tilde{\lambda}'(x)x = 1$, d'où $\tilde{\lambda}'(x) = \dfrac{1}{x}$, d'où $\tilde{\lambda}(x) = \ln|x|$ convient. Donc $y_p : x \mapsto x\ln|x|$ convient.
   Donc les solutions $y : I \to \mathbb{R}$ sont données par :

$$S = \left\{ y : x \mapsto \tilde{\lambda}x + x\ln|x| \mid \tilde{\lambda} \in \mathbb{R} \right\}.$$

3. En $x = 0$, l'équation (E) s'écrit $0 = 0 + y(0)$, donc une solution y de (E) sur $\mathbb{R}$ vérifie $y(0) = 0$.
4. Notons $y_1 : x \mapsto \lambda_1 x + x\ln(-x)$ et $y_2 : x \mapsto \lambda_2 x + x\ln(x)$. Les fonctions y_1 et y_2 sont continues sur I_1 et I_2 respectivement, et par croissances comparées, $y_1(x) \underset{x\to 0_-}{\longrightarrow} 0 = y(0)$ et $y_2(x) \underset{x\to 0_+}{\longrightarrow} 0 = y(0)$, donc y est continue sur $\mathbb{R}$.
   De plus, les fonctions y_1 et y_2 sont dérivables sur I_1 et I_2 respectivement, mais :
   $\forall x \in I_1,\ \dfrac{y_1(x) - y(0)}{x - 0} = \lambda_1 + \ln(-x) \underset{x\to 0_-}{\longrightarrow} -\infty$ et $\forall x \in I_2,\ \dfrac{y_2(x) - y(0)}{x - 0} = \lambda_2 + \ln(x) \underset{x\to 0_+}{\longrightarrow} -\infty$, donc y n'est pas dérivable en 0.