Feuille d'exercices 10
Calcul matriciel et systèmes linéaires

1 - Systèmes linéaires

Exercice 1. Résoudre les systèmes suivants. Préciser dans chaque cas le rang, les inconnues principales et secondaires.

(a) $\begin{cases} 3x - y + z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$,

(b) $\begin{cases} x + y + z - t = 0 \\ 3x - 3y + 2z = 0 \end{cases}$,

(c) $\begin{cases} x + y + 3z = 5 \\ x - y - z = 1 \\ x + z = 3 \end{cases}$,

(d) $\begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ 3x - y - 2z = 0 \\ x + y - z = -2 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases}$.

Exercice 2. Résoudre les systèmes suivants.

(a) $\begin{cases} x - 2y + 4z = 2 \\ 2x - 4y + 2z = 1 \\ 2x + y - 8z = -1 \end{cases}$, (b) $\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x + 2y + z = 4 \\ x + y + 2z = -5 \end{cases}$, (c) $\begin{cases} 3x + 2y + 6z = 0 \\ 4x + 5y + 12z = 1 \\ 2x + 2y + 5z = 1 \end{cases}$.

2 - Opérations

Exercice 3. On considère les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Déterminer la somme $A + B$ et les produits AB et BA.

Exercice 4. Calculer, lorsque cela est possible, les produits AB et BA.

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

(b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

(c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 5. Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Calculer J^2.

(b) Pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$, on pose $M(z) = xI_2 + yJ$.
Montrer que : $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2$, $M(z + z') = M(z) + M(z')$ et $M(zz') = M(z)M(z')$.

(c) Calculer $M(e^{i\theta})^n$, pour $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. En déduire l'équivalence : $(z \in \mathbb{U}_n) \Leftrightarrow (M(z)^n = I_2)$.

Exercice 6. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$. On veut trouver les matrices $M \in M_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$.

(a) Si M est une solution, montrer que M commute avec A.

(b) En déduire que certains coefficients de M sont nuls. Conclure.

Exercice 7. Calculer les puissances $n^{\text{èmes}}$ des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3 - Inversion

Exercice 8. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Calculer $A^2 - 3A + 2I_3$, où I_3 est la matrice identité.

(b) En déduire A^{-1}.

Exercice 9. Soit $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$. Calculer A^4. En déduire A^{-1}.

Exercice 10. Calculer l'inverse, s'il existe, des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 11. Résoudre les systèmes de l'exercice 2 par inversion.

Exercice 12. On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

(b) Vérifier que $A = PDP^{-1}$.

(c) En déduire les puissances de A.

4 - Transposition et symétrie

Exercice 13. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On note $B = {}^tAA$.

(a) Montrer que B est une matrice symétrique.

(b) Montrer que les coefficients diagonaux de B sont positifs.

(c) Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} b_{ii} = 0$ si et seulement si A est la matrice nulle.

Exercice 14. Soient A et B dans $M_n(\mathbb{K})$ symétriques.
Montrer que AB est symétrique si et seulement si A et B commutent.

Exercice 15. Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ antisymétrique.

(a) Montrer que $I_n + M$ est inversible.

(b) Soit $A = (I_n - M)(I_n + M)^{-1}$. Montrer que ${}^tA = A^{-1}$.

Exercice 16. Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ antisymétrique. Montrer que A n'est pas inversible.