

Corrigé partiel du T. D. A6

Équations différentielles

4 Résoudre sur \mathbb{R}_+^* l'équation :

$$y + \ln(ty' + 1) = t$$

avec $y(1) = 1$, en posant $z = e^y$.

Soit $z(t) = e^{y(t)}$. Comme y est supposée dérivable alors z l'est aussi par composition.

De plus $y(t) = \ln z(t)$ et donc : $\forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad y'(t) = \frac{z'(t)}{z(t)}$

On en déduit les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} y(t) + \ln(ty'(t) + 1) = t &\iff \ln z(t) + \ln\left(t \frac{z'(t)}{z(t)} + 1\right) = \ln e^t \\ &\iff tz'(t) + z(t) = e^t \\ &\iff z'(t) + \frac{1}{t}z(t) = \frac{e^t}{t} \end{aligned}$$

La dernière équivalence est valide car on suppose que $t \in \mathbb{R}_+^*$, donc il est non-nul.

Contrairement à l'équation de départ, cette équation est linéaire.

Comme \mathbb{R}_+^* est un intervalle, et $t \mapsto -\ln t$ est une primitive de $t \mapsto -\frac{1}{t}$, alors les solutions de l'équation homogène associée sont les fonctions :

$$\begin{aligned} z_0 : \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \lambda e^{-\ln t} = \frac{\lambda}{t} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

La méthode de variation de la constante nous fournit la solution particulière $z_1 : t \mapsto \frac{e^t}{t}$.

Ainsi les solutions de l'équation d'inconnue z sont les fonctions $z = z_0 + z_1$, à savoir :

$$z(t) = \frac{\lambda + e^t}{t} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

Comme $y(t) = \ln z(t)$ alors les solutions de l'équation de départ sont les fonctions telles que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad y(t) = \ln(\lambda + e^t) - \ln t \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

La condition initiale $y(1) = 1$ donne $\ln(\lambda + e) = 1$ donc $\lambda = 0$.

Finalement la solution de l'équation proposée munie de sa condition initiale est :

$$y(t) = t - \ln t$$

5 Soit $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Démontrer qu'il existe une unique fonction dérivable f de I dans \mathbb{R} telle que :

$$f(0) = 1 \quad \text{et} \quad \forall t \in I \quad f'(t) = \frac{f(t)}{\cos t}$$

La calculer grâce au changement de variable $u = \sin x$.

La condition demandée signifie que f est solution sur I de l'équation différentielle :

$$y' - \frac{1}{\cos t}y = 0 \quad (1)$$

Il s'agit du problème de Cauchy : I est un intervalle, la fonction $t \mapsto \frac{1}{\cos t}$ est définie et continue sur cet intervalle, et la condition initiale est du type $y(t_0) = y_0$ avec $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$.

Ainsi cette équation différentielle muni de sa condition initiale admet une et une seule solution.

Pour la déterminer il faut résoudre l'équation différentielle.

Celle-ci est homogène. On note $a(t) = \frac{1}{\cos t}$ pour tout $t \in I$, puis on pose :

$$\forall t \in I \quad A(t) = \int_0^t \frac{du}{\cos u}$$

La fonction a est continue et I est un intervalle donc le théorème fondamental montre que A est une primitive de a .

La fonction $u \mapsto \sin u$ est de classe \mathcal{C}^1 . En posant $x = \sin u$ on obtient $\frac{dx}{du} = \cos u$, donc $dx = \cos u du$. En appliquant le changement de variable il vient :

$$A(t) = \int_0^t \frac{\cos u du}{1 - \sin^2 u} = \int_0^{\sin t} \frac{dx}{1 - x^2}$$

On décompose en éléments simples :

$$\frac{1}{1 - x^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 + x} + \frac{1}{1 - x} \right)$$

et on en déduit

$$\forall t \in I \quad A(t) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin t}{1 - \sin t}$$

On remarque que pour tout $t \in I$:

$$A(t) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \sin^2 t}{(1 - \sin t)^2} = \ln \sqrt{\frac{\cos^2 t}{(1 - \sin t)^2}} = \ln \frac{\cos t}{1 - \sin t}$$

Ceci car $\cos t$ et $(1 - \sin t)$ sont positifs sur I .

Finalement les solutions de l'équation (1) sont les fonctions

$$\begin{aligned} y_0 : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \lambda e^{A(t)} = \lambda \frac{\cos t}{1 - \sin t} \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

La condition initiale $f(0) = 1$ donne $\lambda = 1$, et donc la fonction recherchée est :

$$f(t) = \frac{\cos t}{1 - \sin t}$$

Cette fonction s'écrit aussi $f(t) = \frac{1+\sin t}{\cos t}$.

7 Déterminer l'ensemble de toutes les fonctions de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R} dérivables telles que :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \quad f(xy) = f(x) + f(y)$$

On note \mathcal{P} la propriété : $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \quad f(xy) = f(x) + f(y)$

La fonction f est dérivable, donc pour composition, pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$ la fonction $x \mapsto f(xy)$ est dérivable, et sa dérivée est $x \mapsto yf'(xy)$. Si la propriété \mathcal{P} est vraie alors par dérivation par rapport à x elle implique :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \quad yf'(xy) = f'(x)$$

Cette relation est vraie *a fortiori* si $y = \frac{1}{x}$, ce qui donne :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \frac{1}{x}f'(1) = f'(x)$$

Posons $a = f'(1)$. Alors : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = \frac{a}{x}$

Comme \mathbb{R}_+^* est un intervalle alors par primitivation il existe un réel b tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) = a \ln x + b$$

Cette phase d'analyse nous a montré que si une fonction $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable vérifie la propriété \mathcal{P} alors il existe deux réels a et b tels que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) = a \ln x + b$.

Dans ce cas la propriété \mathcal{P} s'écrit :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \quad a \ln(xy) + b = a \ln x + b + a \ln y + b$$

Ceci donne $b = 0$.

Cette phase de synthèse nous montre que l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables vérifiant la propriété \mathcal{P} est l'ensemble des fonctions $f : x \mapsto a \ln x$, où a est un réel.

11 Déterminer l'ensemble des fonctions réelles f deux fois dérivables sur \mathbb{R} telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = f(-x)$$

Notons \mathcal{P} la propriété ; $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = f(-x)$

Soit f une fonction deux fois dérivable vérifiant cette propriété. Alors par dérivation :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f''(x) = -f'(-x)$$

Or la propriété \mathcal{P} est valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, si x appartient à \mathbb{R} alors $-x$ appartient à \mathbb{R} , donc on peut substituer $-x$ à x :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(-x) = -f(x)$$

Ainsi on en déduit

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f''(x) = -f(x)$$

Ceci montre que f est solution de l'équation différentielle $y'' - y = 0$.

Or les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto A \cos t + B \sin t \quad \text{où } (A, B) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Ainsi, si une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable vérifie la propriété \mathcal{P} alors elle est de la forme $f(x) = A \cos x + B \sin x$ où A et B sont deux constantes réelles.

Mais dans ce cas la condition \mathcal{P} s'écrit :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \quad -A \sin x + B \cos x &= A \cos x - B \sin x \\ \iff \forall x \in \mathbb{R} \quad (B - A)(\cos x - \sin x) &= 0 \end{aligned}$$

Ceci équivaut à l'égalité $A = B$.

Ainsi l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivables vérifiant la propriété \mathcal{P} est l'ensemble des fonctions $f : x \mapsto A(\cos x + \sin x)$, où A est un réel.

13 Résoudre l'équation différentielle

$$y''' - 2y'' - 4y' + 8y = 0$$

munie des conditions initiales $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$ et $y''(0) = 8$.

On remarque que l'équation différentielle proposée s'écrit :

$$(y' - 2y)'' - 4(y' - 2y) = 0$$

On pose $z = y' - 2y$. Alors y est solution de l'équation proposée si et seulement si z est solution de l'équation :

$$z'' - 4z = 0$$

Les solutions de cette équation différentielle du second ordre sont les fonctions $z : t \mapsto \alpha e^{2t} + \beta e^{-2t}$, où α et β sont deux réels.

De plus les conditions initiales sur y donnent les conditions initiales sur z :

$$z(0) = y'(0) - 2y(0) = -1 \quad \text{et} \quad z'(0) = y''(0) - 2y'(0) = 6$$

Comme $z(t) = \alpha e^{2t} + \beta e^{-2t}$ alors $z'(t) = 2\alpha e^{2t} - 2\beta e^{-2t}$. Les conditions initiales sur z donnent :

$$\begin{cases} z(0) = -1 \\ z'(0) = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha + \beta = -1 \\ 2\alpha - 2\beta = 6 \end{cases}$$

On en déduit $\alpha = 1$ et $\beta = -2$, et donc $z(t) = e^{2t} - 2e^{-2t}$.

Or par définition $z = y' - 2y$, donc on calcule y en résolvant l'équation différentielle du premier ordre :

$$(E) \quad y' - 2y = e^{2t} - 2e^{-2t}$$

Les solutions de l'équation homogène associée sont les fonction $y_0 : t \mapsto \lambda e^{2t}$ où λ est un réel. Ceci par on résout cette équation sur l'intervalle \mathbb{R} et car la fonction $t \mapsto 2t$ est une primitive de la fonction $t \mapsto 2$.

Pour déterminer une solution particulière de l'équation (E) on définit les deux équations suivantes :

$$(E_1) \quad y' - 2y = e^{2t} \qquad (E_2) \quad y' - 2y = -2e^{-2t}$$

On obtient les solutions particulières respectives $y_1(t) = te^{2t}$ et $y_2(t) = \frac{1}{2}e^{-2t}$.

D'après le principe de superposition la fonction $y_3 = y_1 + y_2$ est solution de l'équation (E), puis les fonctions $y = y_0 + y_3$ sont les solutions de l'équation (E). On obtient :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad y(t) = (t + \lambda)e^{2t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}$$

La condition initiale $y(0) = 1$ montre que $\lambda = \frac{1}{2}$. Finalement la solution de l'équation de départ munie de ses conditions initiales est :

$$y(t) = \left(t + \frac{1}{2}\right)e^{2t} + \frac{1}{2}e^{-2t} = te^{2t} + \text{ch}(2t)$$

Remarque : Il est possible aussi de résoudre cet exercice en posant $z = y'' - 4y$.

14 Résoudre sur \mathbb{R}_+^* l'équation différentielle :

$$t^3 y'' - 2ty = 6$$

munie des conditions initiales $y(1) = y'(1) = -1$.

On posera $z(x) = y(e^x)$.

On montre que y est solution si et seulement si z est solutions de l'équation :

$$z'' - z' - 2z = 6e^{-x}$$

Ceci donne $z(x) = (\alpha - 2x)e^{-x} + \beta e^{2x}$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

On en déduit $y(t) = \frac{\alpha + \ln t}{t} + \beta t^2$.

Avec les conditions initiales : $y(t) = -\frac{1+2\ln t}{t}$