Feuille d'exercices 10b
SYSTÈMES LINÉAIRES - COMPLÉMENTS

1 - SYSTÈMES LINÉAIRES

Exercice 1. Résoudre les systèmes suivants.

(a) $\begin{cases} x + 2y + 3z + 2t = 1 \\ x + 3y + 3z + t = 0 \end{cases}$, (b) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 11 \\ -3x - 6y - 8z = -30 \\ -4x - 8y - 11z = -41 \end{cases}$, (c) $\begin{cases} x + y - 3z = 1 \\ 2x + y - 2z = 1 \\ x + y + z = 3 \\ x + 2y - 3z = 1 \end{cases}$.

Exercice 2. Résoudre les deux systèmes suivants. Qu'en pensez-vous ?

(a) $\begin{cases} x + 5y + 9z = 180 \\ 9x + 10y + 5z = 40 \\ 10x + 9y + z = -50 \end{cases}$, (b) $\begin{cases} x + 5y + 9z = 180 \\ 9x + 10y + 5z = 41 \\ 10x + 9y + z = -50 \end{cases}$.

Exercice 3. Étudier, suivant les valeurs des paramètres, l'existence de solutions aux systèmes suivants, et les résoudre.

(a) $\begin{cases} 3x + y + z = 1 \\ x - 2y + 2z = m \\ x + y - z = 1 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x + y + (1-m)z = m+2 \\ (1+m)x - y + 2z = 0 \\ 2x - my + 3z = m+2 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x + y + z + t = a \\ x - y - z + t = b \\ -x - y + z + t = c \\ -3x + y - 3z - 7t = d \end{cases}$

(d) $\begin{cases} ax + 2by + 2z = 1 \\ 2x + aby + 2z = b \\ 2x + 2by + az = 1 \end{cases}$

2 - ÉCHELONNEMENT

Exercice 4. Déterminer la matrice échelonnée réduite par lignes équivalente à chaque matrice. Préciser le rang et le nombre d'inconnues principales et secondaires des systèmes homogènes correspondants.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 7 & 4 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 7 & 2 \\ 2 & 1 & -8 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. Déterminer les valeurs de $m \in \mathbb{R}$ pour lesquelles le système suivant admet des solutions non nulles.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1+m & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1+m & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1+m & 0 \end{array}\right)$$

Exercice 6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. On considère le système suivant : $\begin{cases} x_1 = & \lambda x_n \\ x_2 = & \lambda x_1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n = & \lambda x_{n-1} \end{cases}$.

(a) Écrire la matrice des coefficients de ce système.

(b) En fonction de la valeur de λ, trouver l'ensemble des solutions de ce système.

Exercice 7. Soient n dans $\mathbb{N}^*$, λ dans $\mathbb{C}$ et $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ dans $\mathbb{C}^n$. Trouver à quelle condition le système homogène dont la matrice des coefficients est la suivante admet une inconnue secondaire :

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & -\lambda & \cdots & 0 & -a_1 \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & & & -\lambda & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} - \lambda \end{pmatrix}.$$

3 - Applications

Exercice 8. Déterminer les fonctions polynomiales $P : x \mapsto a + bx + cx^2$ telles que :

(a) $P(0) = -2$, $P(1) = 2$ et $P(2) = 3$,

(b) $P(-1) = 4$ et $P(2) = 1$.

Exercice 9. Montrer qu'il existe un unique polynôme P de degré ≤ 3 tel que $P(0) = -2$, $P(1) = 2$, $P(2) = 3$ et $P(3) = 0$.

Exercice 10. Montrer qu'il existe un unique (α, β, γ) dans $\mathbb{R}^3$ tel que, pour tout polynôme P de degré ≤ 2,

$$\int_1^3 P(t)\,\mathrm{d}t = \alpha P(1) + \beta P(2) + \gamma P(3)\ .$$

Exercice 11.

(a) Soient a, b, c des complexes deux à deux distincts. Trouver (α, β, γ) dans $\mathbb{C}^3$ tel que :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{a, b, c\}, \quad \frac{1}{(z-a)(z-b)(z-c)} = \frac{\alpha}{z-a} + \frac{\beta}{z-b} + \frac{\gamma}{z-c}.$$

(b) Soient a et b deux complexes distincts. Trouver (α, β, γ) dans $\mathbb{C}^3$ tel que :

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{a, b\}, \quad \frac{1}{(z-a)^2(z-b)} = \frac{\alpha}{(z-a)^2} + \frac{\beta}{z-a} + \frac{\gamma}{z-b}.$$

Exercice 12. Résoudre le système $\begin{cases} x^3y^2z^6 & = 1 \\ x^4y^5z^{12} & = \mathrm{e} \\ x^2y^2z^5 & = \mathrm{e}^2 \end{cases}$:

(a) dans le cas où x, y, z sont des réels strictement positifs,

(b) dans le cas où x, y, z sont des complexes.

Exercice 13. Soient n dans $\mathbb{N}^*$ et $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ dans $\mathbb{C}^n$.

(a) Trouver une condition sur ces nombres pour qu'il existe au moins un polygone à n sommets d'affixes $z_1, z_2, \ldots, z_n$ dans le plan complexe tel que :
pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, a_i est le milieu du côté $[z_i, z_{i+1}]$ et a_n est le milieu du côté $[z_n, z_1]$.

(b) Interprétation dans le cas $n = 4$?