TD 17 bis : Suites de fonctions

Exercice 1 : (X)
Pour tout n et $x > 0$, étudier le mode de convergence de la suite de fonctions (f_n) en précisant sa limite.
On définit pour cela $f_n(x) = \dfrac{nx^2e^{-nx}}{(1-e^{-x})^2}$.

Exercice 2 : (Centrale PC 2022 partiel)
Partie I : formule de Stieltjes
I désigne un segment non trivial.
1) Soit r une fonction à valeurs réelles de classe C^n sur I et s'annulant en $n+1$ points distincts de I. Montrer qu'il existe $c \in I$ tel que $r^{(n)}(c) = 0$.
2) Soit f une fonction à valeurs réelles de C^n sur I. Soit $P = \Pi(f)$ le polynôme interpolateur de Lagrange de f associé aux réels $a_1, \ldots, a_n$. Pour tout $x \in I$, montrer qu'il existe $c \in I$ tel que :
$f(x) - P(x) = \dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}W(x)$, où $W : x \to \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(x - a_i)$.
(On pourra, pour x distinct des a_i, considérer la fonction r définie sur I par $r(t) = f(t) - P(t) - KW(t)$, où le le réel K est choisi de façon que $r(x) = 0$.)
3) En déduire (sous les mêmes hypothèses pour f et en prenant $I = [a, b]$ que :
$\max\limits_{x\in I}|f(x) - P(x)| \leq \dfrac{M_n(b-a)^n}{n!}$, où on a posé $M_n = \max\limits_{x\in I}|f^{(n)}(x)|$.
Notations et problématique
On considère encore un segment I et une fonction f définie sur I. De plus, pour tout entier naturel non nul n, on suppose donnés des réels distincts $a_{1,n} < \cdots < a_{n,n}$ de I et on considère $P_n = \Pi_n(f)$ le polynôme interpolateur de Lagrange de f associé à ces réels $a_{1,n}, \ldots, a_{n,n}$.
En notant $L_{1,n}, L_{2,n}, \ldots, L_{n,n}$ les polynômes de Lagrange associes à $a_{1,n}, \ldots, a_{n,n}$ on a donc :

$$\Pi_n(f) = \sum_{i=1}^{n} f(a_{i,n})L_{i,n} \tag{1}$$

et $\Pi_n(f)$ est l'unique polynôme $P_n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $P_n(a_{i,n}) = f(a_{i,n})$ pour tout $1 \leq i \leq n$.
On s'intéresse à l'éventuelle convergence uniforme sur I vers f de la suite de polynômes $(\Pi_n(f))$ pour deux exemples de fonctions C^∞.
Partie II: Convergence uniforme vers la fonction exponentielle
Dans cette section, $I = [a, b]$, où $a < b$, et f est la restriction à I de la fonction exponentielle :
$\forall x \in I, \qquad f(x) = \exp(x)$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $P_n = \Pi_n(f)$ le polynôme interpolateur comme il est défini ci-dessus.
4) Montrer que la suite (P_n) converge uniformément vers f sur I.
5) Montrer qu'il existe une suite de polynômes (Q_n) qui converge uniform ément vers f sur I et telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction Q_n ne coïncide avec f en aucun point de I, sauf peut-être en zéro.
Partie III: Phénomène de Runge
A) : Etude d'une intégrale généralisée
Pour tout réel $\alpha > 0$, on considère la fonction $h_\alpha : t \to \ln\left(\dfrac{1-t^2}{\alpha^2+t^2}\right)$.
6) Montrer que h_α est une fonction continue, décroissante et intégrable sur $[0, 1[$.
On pose : $J_\alpha = \displaystyle\int_0^1 h_\alpha(t)dt$.
7) Justifier que
$$\begin{aligned} J_\alpha &= \int_0^1 \ln(1-t)dt + \int_0^1 \ln(1+t)dt - \int_0^1 \ln(\alpha^2+t^2)dt \\ &= \int_0^2 \ln(u)du - \int_0^1 \ln(\alpha^2+t^2)dt. \end{aligned}$$
8) En déduire que $J_\alpha = 2\ln(2) - \ln(1+\alpha^2) - 2\alpha \arctan\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)$.
9) Montrer qu'il existe $\gamma > 0$ tel que, pour tout $\alpha \in]0, \gamma[$, $J_\alpha > 0$.
B) : Application à une somme de Riemann

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère dans $]0,1[$ les points $a_{k,n}$ donnés, pour $0 \le k \le n-1$, par $a_{k,n} = \dfrac{2k+1}{2n}$ et on pose :

$$S_n(h_\alpha) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} h_\alpha(a_{k,n}) = \frac{1}{n}\left(h_\alpha\left(\frac{1}{2n}\right) + h_\alpha\left(\frac{3}{2n}\right) + \cdots + h_\alpha\left(\frac{2n-1}{2n}\right)\right).$$

10) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que :

$$\int_{1/2n}^{(2n-1)/2n} h_\alpha(t)dt + \frac{1}{n}h_\alpha\left(\frac{2n-1}{2n}\right) \le S_n(h_\alpha) \le \frac{1}{n}h_\alpha\left(\frac{1}{2n}\right) + \int_{1/2n}^{(2n-1)/2n} h_\alpha(t)dt.$$

11) En déduire que la suite $(S_n(h_\alpha))$ converge vers J_α.

12) Montrer que, pour $\alpha \in]0,\gamma[$, la suite $\left(\left|\prod_{k=0}^{n-1} \dfrac{1-a_{k,n}^2}{\alpha^2 + a_{k,n}^2}\right|\right)$ diverge vers $+\infty$.

C): Le phénomène de Runge

Ici $I = [-1,1]$ et $\alpha > 0$ et $f_\alpha : x \in I \to \dfrac{1}{\alpha^2 + x^2}$.

On reprend les points $a_{k,n}$ définis dans le B).

Enfin, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note R_n l'interpolant de Lagrange de f_α aux $2n$ points $\pm a_{k,n}, 0 \le k \le n-1$ et on pose $Q_n = 1 - (X^2 + \alpha^2)R_n$.

13) Montrer que R_n est un polynôme pair et déterminer $Q_n(\alpha \mathrm{i})$.

14) Montrer qu'il existe $\lambda_n \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in [-1,1], \qquad Q_n(x) = \lambda_n \prod_{k=0}^{n-1}(x^2 - a_{k,n}^2).$$

15) En déduire que, pour tout $x \in [-1,1]$, $f_\alpha(x) - R_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{x^2+\alpha^2}\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\frac{x^2 - a_{k,n}^2}{\alpha^2 + a_{k,n}^2}$.

16) On suppose que $\alpha < \gamma$. Montrer que :

$\lim\limits_{n\to+\infty} |f_\alpha(1) - R_n(1)| = +\infty$.

Commentaires?

Solution : 1) Notons $x_0 < .... < x_n$ des points de I où r s'annule.

Si $n = 0$, on n'a qu'à constaté.

Si $n \ge 1$, en appliquant sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ ($0 \le i \le n-1$) le théorème de Rolle à f ($f(x_i) = f(x_{i+1}) = 0$), on met en évidence un réel $y_i \in]x_i, x_{i+1}[$ en lequel f' s'annule.

Autrement dit f' s'annule en $y_0 < ... < y_{n-1}$ points de I.

Par itération $f^{(p)}$ s'annule en $n+1-p$ points de I $(0 \le p \le n$)■

2) Premier cas x est un des a_i, alors l'égalité en vue est vraie (pour tout c) car sse résume à $0 = 0$.

Deuxième cas $x \ne a_i$, $1 \le i \le n$.

On pose (selon les préconisations de l'énoncé) : $K = \dfrac{f(x) - P(x)}{W(x)}$.

Dès lors la fonction r s'annule en tous les a_i ainsi qu'en x donc en $n+1$ points de I et r est bien de classe C^n sur I puisque elle est CL de f et d'une fonction polynôme. Donc par Q1, il existe $c \in I$ tel que $r^{(n)}(c) = 0$, ce qui donne (P étant de degré $\le n-1$) $f^{(n)}(c) - 0 - KW^{(n)}(c) = 0$ soit $f^{(n)}(c) - 0 - Kn! = 0$ ou $K = \dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}$.

Mais on a aussi $K = \dfrac{f(x) - P(x)}{W(x)}$ d'où la relation■

3) En vertu de Q2, nous avons, pour tout $x \in I$, $|f(x) - P(x)| \le \dfrac{M_n}{n!}\displaystyle\prod_{i=1}^{n}|x - a_i| \le \frac{M_n}{n!}(b-a)^n$ (ce puisque chaque $a_i \in [a,b]$).

En particulier (th des bornes atteintes) : $\max\limits_{x\in I}|f(x) - P(x)| \le \dfrac{M_n(b-a)^n}{n!}$■

4) L'inégalité précédente donne :

$\forall x, \forall n, |f(x) - P_n(x)| \le e^b \dfrac{(b-a)^n}{n!} = u_n$.

Comme $u_n \to 0$ (car proportionnel au TG d'une série exponentielle), il y a bien CVU sur I de la suite (P_n) vers f.

5) On suppose donc (ce qui n'est pas clair dans l'énoncé) que $0 \in I$ que l'on prendra (sans perte de généralité) comme étant égal à $[-a,a]$ (a >0).

Pour $n \ge 1$ et $x \in I$, on pose $Q_n(x) = (1 + \dfrac{x}{n})^n$.

Par convexité, $e^t > t + 1$, pour $t \ne 0$.

Donc (en posant $t = x/n$) et pour $n > a$, $(e^{x/n})^n > (1 + \dfrac{x}{n})^n$ (la restriction sur x permet d'utiliser la

stricte croissance des fonctions puissances sur $\mathbb{R}_+$).
Dés lors $Q_n(x) < e^x$, ce pour tout $n \geq a$ et tout x non nul dans I.
On a déjà vu (cf vos TD) que la suite (Q_n) converge simplement vers $f = exp$ sur I.
Nous montrons maintenant que cette convergence est en fait uniforme.
A cette fin, on écrit que $f(x) - (1 + \dfrac{x}{n})^n = e^x g_n(x)$, où on a posé : $g_n(x) = 1 - e^{-x}(1 + \dfrac{x}{n})^n$,tout ceci pour tout $x \in I$ et tout $n \geq 1$
g_n est clairement dérivable sur I et, pour tout $x \in I, g_n'(x) = xe^{-x}(1 + \dfrac{x}{n})^{n-1}$; il en découle que g_n décroit de $g_n(-a)$ à 0 puis croît de 0 à $g_n(a)$. Ainsi : $\forall x \in I, \forall n \geq 1, |f(x) - Q_n(x)| \leq e^a(g_n(-a) + g_n(a)$. La CVS sur I de la suite (Q_n) vers exp donne la convergence vers 0 de la suite majorante donc la CVU espérée■
6) En observant que h_α est continue sur [0,1[puis que $h_\alpha(t) = \ln(1-t) + \ln(1+t) - \ln(\alpha^2 + t^2)$ sur ce même intervalle, on voit que l'intégrabilité de h_α se résume à celle de $t \to \ln(1-t)$.
Cette dernière équivaut (intégrande négative) à la convergence de l'IG $\displaystyle\int_0^1 \ln(1-t)dt$ qui vient (changement de variable affine criant) de celle de $\displaystyle\int_0^1 \ln(u)du$ qui est notoire■
7) En utilisant l'expression de h_α donnée en Q6 et par linéarité intégrabilité, il vient :
$J_\alpha = \displaystyle\int_0^1 \ln(u)du + \int_1^2 \ln(u)du - \int_0^1 \ln(\alpha^2 + t^2)dt$ (Avec changement de variable affine bien clair); Chasles donne l'égalité voulue■
8) Immédiatement (IPP): $J_\alpha = [t\ln(t) - t]_0^2 - [t\ln(\alpha^2 + t^2)]_0^1 + \displaystyle\int_0^1 \frac{2t^2}{\alpha^2 + t^2}$.
Soit $J_\alpha = 2\ln(2) - 2 - \ln(1 + \alpha^2) + 2\displaystyle\int_0^1 \frac{(t^2 + \alpha^2) - \alpha^2}{\alpha^2 + t^2}$.
Donc et enfin $J_\alpha = 2\ln(2) - 2 - \ln(1 + \alpha^2) + 2 - 2\alpha^2 \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\alpha^2 + t^2} = 2\ln(2) - \ln(1 + \alpha^2) - 2\alpha \arctan\left(\frac{1}{\alpha}\right)$■
9) L'expression de J_α comme fonction du réel $\alpha > 0$ trouvée précédemment permet de vérifier que J_α tend vers $2\ln(2)$ si $\alpha \to 0^+$ donc que sur un intervalle du type $]0, \gamma]$ J_α est strictement positif■
10) Simples considérations d'aire (h_α décroît cf sa dérivée)■
11) La convergence de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^1 h_\alpha$ fait que les deux intégrales de l'encadrement précédent tendent (si $n \to \infty$) vers J_α.
La continuité en 0 de h_α donne $\dfrac{1}{n}h_\alpha(\dfrac{1}{2n}) \underset{n\to\infty}{\to} 0$.
Enfin (grâce à la décomposition de h_α (cf Q6) on a pour $t \to 1$ $h_\alpha(t) \sim \ln(1-t)$ donc $\dfrac{1}{n}h_\alpha(\dfrac{2n-1}{2n}) \sim \dfrac{1}{n}\ln(1/2n) \underset{n\to\infty}{\to} 0$.
Le théorème des gendarmes assure donc bien que la suite $(S_n(h_\alpha))$ converge vers J_α■
12)Pour $n \geq 1$ et $\alpha \in]0, \gamma]$, $nS_n(h_\alpha) = \ln(A_n)$, où on a posé $A_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \frac{1 - a_{k,n}^2}{\alpha^2 + a_{k,n}^2}$. Cette égalité et la question précédente donnent la divergence souhaitée■
13) Pour simplifier : on pose $x_k = a_{k,n}$ et $L_k = \displaystyle\prod_{j\neq k} \frac{X - x_j}{x_k - x_j} \prod_{j=0}^{n-1} \frac{X + x_j}{x_k + x_j}$, puis $L_{-k} = \displaystyle\prod_{j\neq k} \frac{X + x_j}{-x_k + x_j} \prod_{j=0}^{n-1} \frac{X - x_j}{-x_k - x_j}$, tout cela si $0 \leq k \leq n-1$.
Dans ces conditions $R_n = \sum k = 0^{n-1}(f(x_k)L_k + f(-x_k)L_{-k}) = \sum k = 0^{n-1} f(x_k)(L_k + L_{-k})$ (par Lagrange et parité de $f = f_\alpha$).
On observe alors que $L_k(-x) = \displaystyle\prod_{j\neq k} \frac{-x - x_j}{x_k - x_j} \prod_{j=0}^{n-1} \frac{-x + x_j}{x_k + x_j} = L_{-k}(x)$ et donc que $L_{-k}(-x) = L_k(x)$, ce pour tout réel x, la parité de R_n en découle.
Enfin $\mathbb{Q}_n(\alpha i) = 1$■
14) Puisque R_n interpole f en les $\pm x_k$, on a $Q_n(\pm x_k) = 1 - \dfrac{R_n(\pm x_k)}{f(\pm x_k)} = 1 - 1 = 0$, ce pour tour $0 \leq k \leq n-1$.
En conséquence (et puisque le degré de R_n est inférieur ou égal à $2n-2$ (car pair et de degré inférieur ou égal à $2n-1$),$deg(Q_n) \leq 2n$ et on a mis en évidence $2n$ racines distinctes pour ce polynôme donc il existe bien un réel λ_n tel que $Q_n = \lambda_n \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(X^2 - x_k^2)$
Il est par ailleurs de déterminer ce coefficient dominant grâce à l'information $\mathbb{Q}_n(\alpha i) = 1$ qui nous fournit :

$\lambda_n = \dfrac{(-1)^n}{\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha^2 + x_k^2)}$ ■

15) Pour tout $x \in [-1, 1]$ et tout $n \geq 1$, $f(x) - R_n(x) = \dfrac{Q_n(x)}{x^2 + \alpha^2}$ (par définition de Q_n) donc, en effet, $f(x) - R_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{x^2 + \alpha^2} \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \dfrac{x^2 - a_{k,n}^2}{\alpha^2 + a_{k,n}^2}$ ■

16) Il suffit de spécialiser dans la formule précédente et d'utiliser Q12. La suite de polynômes d'interpolation de f ne converge pas simplement vers f sur $[-1, 1]$ ■