TD 19 : Suites de matrices (I) Corrigé partiel

On revient sur la question 3 de la partie I; elle a été traitée de façon différente avec les deux groupes. Pour le premier on s'en est tenu à l'énoncé, d'où une démonstration aride mais nécessaire; pour le second on a pris un peu de hauteur et la preuve s'en trouve plus fluide.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ muni d'une norme notée $\|.\|$.
On note sa base canonique $B = (e_1, \dots, e_n)$.
Soit u un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ vérifiant la propriété suivante: $\forall \lambda \in Sp(u), |\lambda| < 1$.
On note A la matrice de l'endomorphisme u dans la base B.

1 Convergence d'une suite de matrices

L'objectif de cette partie est de montrer que $\lim\limits_{k \to +\infty} A^k = 0$.
On suppose que $A = T$ où T est une matrice triangulaire supérieure:

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

1) Montrer que $\lim\limits_{k \to +\infty} \|u^k(e_1)\| = 0$ et en déduire $\lim\limits_{k \to +\infty} u^k(e_1)$.
On suppose qu'il existe $i \in [|1, n-1|]$ tel que, pour tout $j \in [|1, i|]$, on ait $\lim\limits_{k \to +\infty} u^k(e_j) = 0$.
2) Montrer qu'il existe $x \in (e_j)_{1 \le j \le i}$ tel que : $u(e_{i+1}) = \lambda_{i+1} e_{i+1} + x$.
En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $u^k(e_{i+1}) = \lambda_{i+1}^k e_{i+1} + \sum\limits_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x)$.
3) Montrer que $\lim\limits_{k \to +\infty} \left\| \sum\limits_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x) \right\| = 0$. En déduire que $\lim\limits_{k \to +\infty} u^k(e_{i+1}) = 0$.
4) Montrer alors que $\lim\limits_{k \to +\infty} T^k = 0$.
5) On ne suppose plus que A est triangulaire supérieure. Montrer que $\lim\limits_{k \to +\infty} A^k = 0$.

Solution :
Q2, Q4 et Q5 ne sont pas vraiment concernées par cette approche différente mais simplificatrice.
On propose de remplacer la convergence vers 0 des suites $(||u^k(e_i)||)_k$ par la convergence des séries $\sum\limits_{k \ge 0} ||u^k(e_i)||$.
Ce qui est plus fort et entraîne ce que l'énoncé intitial souhaitait.
Pour Q1 c'est Ok puisque $||u^k(e_1)|| = ||u(e_1)|||\lambda_1^k|$ et que $|\lambda_1| < 1$.
On suppose donc la convergence des séries $\sum\limits_{k \ge 0} ||u^k(e_j)||$, pour $1 \le j \le i$.
On passe à la démonstration de Q3.
En posant $x = \sum\limits_{p=1}^{i} a_p e_p$, il vient que, pour tout k et par inégalité triangulaire que :

$||u^k(x)|| \le \sum\limits_{p=1}^{i} |a_p|||u^k(e_p)||$, ce qui montre par comparaison des séries à termes positifs que la série $\sum\limits_{k \ge 0} ||u^k(x)||$ converge (absolument).

Posons enfin pour tout k : $w_k = \sum\limits_{m=0}^{k-1} \lambda_{i+1}^{k-m-1} u^m(x)$.

Dés lors et pour tout k : $||w_k|| \leq \sum_{m=0}^{k-1} |\lambda_{i+1}|^{k-1-m}||u^m(x)||$.

Le terme majorant est celui du **produit de Cauchy de deux séries ACV** (à savoir $\sum_{p\geq 0} |\lambda_{i+1}|^p$ et $\sum_{p\geq 0} ||u^p(x)||$) donc lui même (A)CV et par comparaison , la série $\sum_{k\geq 0} ||w_k||$.

De là, avec Q2 et par inégalité triangulaire, on déduite que la série $\sum_{k\geq 0} ||u^k(e_{i+1})||$ converge ■

La fin de Q3 en découle et, comme déjà écrit, la fin reste inchangée dans son argumentation.

2 Application à la méthode de Gauss-Seidel

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que :$\forall 1 \leq i \leq n, |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{i,j}|$.

On dit alors que A est une matrice à **diagonale strictement dominante**. On admet que dans ce cas A est inversible. (Nous avons déjà fait cet exercice, je vous conseille vivement d'y revenir).

On définit ensuite $M \in M_n(\mathbb{C})$ et $F \in M_n(\mathbb{C})$ de la manière suivante :

$\forall 1 \leq i, j \leq n$,

- si $i \geq j$, $m_{i,j} = a_{i,j}$ et $f_{i,j} = 0$ et
- si $i < j$, $m_{i,j} = 0$ et $f_{i,j} = -a_{i,j}$.

Ainsi, $A = M - F$ où F est la partie triangulaire supérieure de diagonale nulle de $-A$ et où M est la partie triangulaire inférieure de A.

Soit $Y \in M_{n,1}(\mathbb{C})$. On note $X \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ l'unique matrice colonne telle que : $AX = Y$.

Le but de cette partie est de trouver une suite qui converge vers X.

6) Justifier que M est inversible.

Dans la suite de cette partie, on pose $B = M^{-1}F$.

On définit par récurrence une suite de matrices colonnes $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ avec $X_0 \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ quelconque et : $\forall k \in \mathbb{N}, X_{k+1} = BX_k + M^{-1}Y$.

7) Montrer que $X = BX + M^{-1}Y$.

Soit λ une valeur propre quelconque de la matrice B. On note $V \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre de B associé à cette valeur propre.

8) Montrer que $FV = \lambda MV$. En déduire que :

$\forall 1 \leq i \leq n,\ \lambda a_{i,i}v_i = -\left(\sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j}v_j + \lambda\sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}v_j\right)$. 9) Prouver l'existence d'un entier i_0, $1 \leq i_0 \leq n$ tel que $|v_{i_0}| = \max_{1\leq j\leq n} |v_j|$ et $v_{i_0} \neq 0$. En déduire que : $|\lambda a_{i_0,i_0}| \leq \left(\sum_{j=i_0+1}^{n} |a_{i_0,j}| + |\lambda|\sum_{j=1}^{i_0-1} |a_{i_0,j}|\right)$.

10) En déduire que $|\lambda| < 1$, puis que $\lim_{k\to+\infty} B^k = 0$.

11) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, X_k - X = B^k(X_0 - X)$ et conclure.

(Partie II CCINP PSI 2023)

Solution :

6) Compte tenu du fait que A soit à diagonale strictement dominante, il en découle que ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. Or le déterminant de M est le produit de ses éléments diagonaux, il est donc non nul ainsi M est inversible■

7) Puisque A est inversible, X est caractérisé par l'égalité $AX = Y$.

Or $A(BX + M^{-1}Y) = (M - F)BX + (M - F)M^{-1}Y = FX - FM^{-1}X + Y - FM^{-1}(M - F)X = Y$ d'où l'égalité voulue■

8) Par définition $BV = \lambda V$ soit $M^{-1}FV = \lambda V$ d'où $FV = \lambda MV$.

Il suffit alors d'exploiter l'égalité matricielle précédente■

9) Cela résulte du fait qu'un vecteur propre n'est pas le vecteur nul. Une utilisation basique de l'inégalité triangulaire fournit la seconde partie■

10) De la fin de la question précédente, on déduit que :

$|\lambda|(|a_{i_0,i_0}| - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i_0}}^{n} |a_{i_0,j}|) \leq (1 - |\lambda|)(\sum_{j=i_0+1}^{n} |a_{i_0,j}|)$

Puisque A est à diagonale strictement dominante le minorant de l'inégalité précédente est strictement positif, cela entraîne $|\lambda| < 1$; la suite découle de la partie I$\blacksquare$
11) Simple récurrence pour la formule à obtenir.
Comme la suite de matrices (B^k) converge vers la matrice nulle 0_n, par compatibilité produit matriciel et limite, il vient que la suite $(B^k(X_0 - X))$ converge vers $0_n(X_0 - X) = 0_{n,1}$.
Par conséquent la suite $(X_k - X)$ converge vers $0_{n,1}$ i.e $X_k \underset{k\to\infty}{\to} X$$\blacksquare$