Feuille d'exercices 11
Suites numériques

1 - Généralités

Exercice 1. Trouver deux suites différentes (u_n) et (v_n) telles que
(a) $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, (b) $\forall N \in \mathbb{N},\ \{u_n \mid n \geq N\} = \{v_n \mid n \geq N\}$.

Exercice 2. Avec des quantificateurs, rappeler les définitions de suite croissante, décroissante, bornée, stationnaire, périodique. Parmi ces propriétés, lesquelles sont vérifiées pour les suites dont les termes généraux sont les suivants ?
(a) $u_n = \dfrac{1}{n}$ pour $n \geq 1$,
(b) $v_n = 2^n$,
(c) $w_n = \cos\left(n\dfrac{\pi}{3}\right)$,
(d) x_n est la $n^{\text{ème}}$ décimale de π,
(e) $y_n = \max(100 - n, 0)$,
(f) $z_n = \min(n - 5, (-1)^n)$.

Exercice 3. Écrire avec des quantificateurs les assertions suivantes :

(a) La suite (u_n) est majorée.
(b) La suite (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang.
(c) La suite (u_n) est périodique de période paire.
(d) La suite des termes d'indices pairs de (u_n) est périodique.

2 - Suites récurrentes

Exercice 4. Déterminer le terme général de la suite (u_n) définie par :

(a) $u_{n+1} = 3u_n + 2,\ u_0 = 0$,
(b) $u_{n+1} = 7u_n - 6,\ u_0 = -1$,
(c) $u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n,\ u_0 = 0,\ u_1 = 1$,
(d) $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n,\ u_0 = 2,\ u_1 = -2$,
(e) $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n,\ u_0 = u_1 = 1$,
(f) $u_{n+2} = -u_{n+1} - 2u_n,\ u_0 = 0,\ u_1 = 2$.

Exercice 5.
(a) Soit (u_n) la suite définie par récurrence par $u_0 \in [0, 3[$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \sqrt{x+6}$. Déterminer la limite éventuelle de (u_n).
(b) Même question pour la suite (v_n) définie par $v_0 \in [0, +\infty[$ et $v_{n+1} = g(v_n)$ avec $g(x) = 1 + \dfrac{x^2}{4}$.
(c) Même question pour la suite (w_n) définie par $w_0 \in]0, +\infty[$ et $w_{n+1} = h(w_n)$ avec $h(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

Exercice 6. Soient $f :]0, +\infty[\to]0, +\infty[$ définie par $f(x) = \dfrac{x+3}{2x}$ et (u_n) la suite définie par $u_0 \in \left]0, \dfrac{3}{2}\right[$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Déterminer la limite éventuelle de (u_n). Que se passe-t-il si $u_0 \in \left[\dfrac{3}{2}, +\infty\right[$?

3 - Suites convergentes

Exercice 7. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Quelles sont les suites satisfaisant
(a) $\forall \varepsilon \geq 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ |u_n - \ell| \leq \varepsilon$?
(b) $\exists N \in \mathbb{N},\ \forall \varepsilon > 0,\ \forall n \geq N,\ |u_n - \ell| \leq \varepsilon$?

Exercice 8. En revenant à la définition de la limite, montrer que

(a) $\left(\dfrac{1}{n^3}\right)_{n\geq 1}$ converge vers 0,

(b) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n-1}}\right)_{n\geq 2}$ converge vers 0,

(c) $\left(n^4\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$,

(d) $\left(-2\sqrt[3]{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$.

Exercice 9.

(a) Écrire avec des quantificateurs l'assertion "(u_n) diverge".

(b) Montrer que la suite de terme général $u_n = (-1)^n$ est bornée et divergente.

(c) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui tend vers $-\infty$. Montrer que (u_n) diverge.

Exercice 10. Soit (u_n) une suite telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \mathbb{Z}$. Montrer que si (u_n) converge, alors (u_n) est stationnaire.

Exercice 11. Soit (u_n) une suite qui tend vers $+\infty$ et λ un réel. Montrer que si $\lambda > 0$, alors $\lambda u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, et si $\lambda < 0$, alors $\lambda u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$. Que se passe-t-il si $\lambda = 0$?

Exercice 12. Soit (u_n) une suite bornée. Montrer que si $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, et que si $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 13.

(a) Montrer que si (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors $(|u_n|)$ converge vers $|\ell|$.

(b) Montrer que si (u_n) tend vers $-\infty$, alors $(|u_n|)$ tend vers $+\infty$.

Exercice 14. Trouver les limites des suites dont les termes généraux sont les suivants :

(a) $u_n = \dfrac{n^3}{n^2+n+1}$,

(b) $v_n = \dfrac{4-n+3n^2}{7-n^2-n^4}$,

(c) $w_n = \dfrac{n^{19}+2}{n^{17}-2n^{19}}$,

(d) $x_n = \dfrac{(2^n+1)(3^n-1)}{6^n-4}$,

(e) $y_n = \dfrac{(6^n+1)((\frac{1}{2})^n+1)}{3^n}$,

(f) $z_n = (2^n-3^n)(n^2-6)$.

Exercice 15. Déterminer les limites des suites dont les termes généraux sont les suivants :

(a) $u_n = \dfrac{e^n}{n\ln(n)}$,

(b) $v_n = n^{\frac{1}{n}}$,

(c) $w_n = (\ln(n))^{\frac{1}{n}}$,

(d) $x_n = \ln\left(\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$,

(e) $y_n = \ln(n+1) - \ln(n)$,

(f) $z_n = n\cos\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 16. On considère une suite (u_n). Est-il vrai que...

(a) si $u_n \neq 0$ pour tout n dans $\mathbb{N}$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors $\dfrac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$?

(b) si $u_n \neq 0$ pour tout n dans $\mathbb{N}$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $\dfrac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$?

(c) si $u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors (u_n) est convergente ?

(d) si $u_n \neq 0$ pour tout n dans $\mathbb{N}$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, alors (u_n) est convergente ?

(e) si $u_n > 0$ pour tout n dans $\mathbb{N}$, alors $nu_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$?

(f) si $u_n > 1$ pour tout n dans $\mathbb{N}$, alors $(u_n)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$?

4 - Théorèmes de convergence

Exercice 17. Déterminer les limites des suites dont les termes généraux sont les suivants :

(a) $v_n = \dfrac{2\sin(n)}{6n+5}$,

(b) $x_n = \dfrac{5n^2 - n\cos(n)}{n^2-7}$,

(c) $w_n = \dfrac{7+2(-1)^n}{n^2}$,

(d) $u_n = \dfrac{5n+2}{3n+\cos(n)}$,

(e) $y_n = \dfrac{n+(-1)^n}{2+(-1)^n}$,

(f) $z_n = \dfrac{n^3+(-1)^n}{n^2+1}$.

Exercice 18. En utilisant le théorème d'encadrement, trouver les limites de $\left(\dfrac{\sin n}{n+(-1)^{n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\dfrac{n!}{n^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 19. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) suivantes sont adjacentes :

(a) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$,

(b) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$,

(c) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}$.

Exercice 20. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 \leq b \leq a$. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_0 = a,\ v_0 = b,\ \forall n \in \mathbb{N}\ :\ u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2},\ v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}.$$

(a) Montrer que : $\forall x, y \in \mathbb{R}_+,\ \sqrt{xy} \leq \dfrac{x+y}{2}$.

(b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n$.

(c) En déduire que (u_n) est décroissante et (v_n) croissante.

(d) En déduire que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Exercice 21.

(a) Soit $a > 0$. Montrer que la suite de terme général $u_n = an$ tend vers $+\infty$.

(b) Montrer que si $u_n \to +\infty$ et si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n$, alors $v_n \to +\infty$.

(c) Montrer que pour $\forall n \in \mathbb{N},\ (1+a)^n \geq 1 + an$.

(d) Soit $q > 1$. Déduire de ce qui précède que la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

5 - Suites extraites

Exercice 22. Soit (u_n) la suite des décimales de π. Montrer que (u_n) admet une sous-suite convergente.

Exercice 23. Soit (u_n) une suite convergente vers un réel ℓ. Déterminer l'ensemble des limites des suites extraites de la suite $\left(u_n \sin\left(\dfrac{n\pi}{3}\right)\right)$.

Exercice 24. Soient (u_n) une suite réelle et ℓ un réel.

(a) Montrer que (u_n) converge vers ℓ si et seulement si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent toutes deux vers ℓ.

(b) À quelle condition sur les extractions φ_1, φ_2 a-t-on l'équivalence

$$(u_n) \text{ converge vers } \ell \iff \left(u_{\varphi_1(n)}\right) \text{ et } \left(u_{\varphi_2(n)}\right) \text{ convergent vers } \ell \text{ ?}$$

Exercice 25. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On suppose que (u_{2n}) converge, que (u_{2n+1}) converge et que (u_{3n}) converge. Montrer que la suite (u_n) converge.

6 - Relations de comparaison

Exercice 26. Déterminer un équivalent simple, lorsque $n \to +\infty$, des termes suivants :

(a) $u_n = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n+1}$,

(b) $v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$,

(c) $w_n = \dfrac{n^3 - \sqrt{1+n^2}}{\ln n - 2n^2}$,

(d) $x_n = \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$,

(e) $y_n = \operatorname{ch}(n^2)$,

(f) $z_n = \sqrt{1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$.

Exercice 27. Déterminer les limites des suites dont les termes généraux sont les suivants :

(a) $u_n = \dfrac{\sin\left(\frac{2}{n^2}\right)}{\tan\left(\frac{3}{n^2}\right)}$,

(b) $v_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$,

(c) $w_n = \dfrac{\ln\left(1 + \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{e^{\frac{6}{n}} - 1}$,

(d) $x_n = \dfrac{1 - \cos\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)}{\ln\left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)}$,

(e) $y_n = n\sqrt{4 + \dfrac{1}{n}} - 2n$,

(f) $z_n = \dfrac{n^3 \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + n}{n+1}$.

Exercice 28. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k! \underset{n\to+\infty}{\sim} n!$.

Exercice 29. Soit (u_n) la suite de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\ln n} + \dfrac{1}{n}$. Montrer que $u_n + u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{n}$. A-t-on $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$?

7 - Pour aller plus loin

Exercice 30. Soit $D \geq 2$ un entier (on peut faire l'exercice avec $D = 2$ ou $D = 10$). Soit $f : [0,1[\to [0,1[$ la fonction $f(x) = Dx - \llcorner Dx \lrcorner$, où $\llcorner y \lrcorner$ est la partie entière du réel y. Soient $a \in [0,1[$ et $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite récurrente donnée par $u_1 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = f(u_n)$.

(a) Tracer le graphe de f.

(b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = D^n a - \llcorner D^n a \lrcorner$.

(c) Montrer que si $a \in \mathbb{Q}$, alors (u_n) est périodique à partir d'un certain rang.

On définit la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\forall i \in \{0, 1, \dots, D-1\},\ d_n = d_n(a) = i$ si $u_n \in \left[\dfrac{i}{D}, \dfrac{i+1}{D}\right]$.

(d) Montrer que $\forall a \in [0,1[,\ \forall n \in \mathbb{N},\ d_n(f(a)) = d_{n+1}(a)$.

(e) Montrer que $\forall N \in \mathbb{N},\ \left|\displaystyle\sum_{k=0}^{N} \dfrac{d_k}{D^k} - a\right| < \dfrac{1}{D^N}$.

(f) Montrer que si (u_n) est périodique de période p à partir du rang N_0, alors la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=N_0}^{N_0+np} \dfrac{d_k}{D^k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{Q}$.

(On pourra regrouper dans la somme par paquets de p et identifier une suite géométrique.)

(g) Montrer que (u_n) est périodique à partir d'un certain rang si et seulement si $a \in \mathbb{Q}$.