Devoir à la maison n° 6

CORRIGÉ

Exercice 1.

1. Soient $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ puis $z = y' - y$. On a :

$$\begin{aligned} z'' + z' - 2z &= (y''' - y'') + (y'' - y') - 2(y' - y) \\ &= y''' - 3y' + 2y, \end{aligned}$$

donc : $z'' + z' - 2z = 5e^t \Leftrightarrow y''' = 3y' - 2y + 5e^t$.
Les conditions initiales sur z correspondant aux conditions de l'équation (E) sont : $z(0) = y'(0) - y(0) = -1$ et $z'(0) = y''(0) - y'(0) = 5$.

2. La fonction $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. L'équation caractéristique associée est $r^2 + r - 2 = 0$, de racines 1 et -2, donc les solutions de l'équation homogène sont les :

$$z_h : t \mapsto \lambda e^t + \mu e^{-2t}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Comme le second membre $t \mapsto 5e^t$ est de la forme $t \mapsto \alpha e^{\beta t}$ où $\beta = 1$ est racine simple de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière de la forme $y_p : t \mapsto kte^t$.
D'après le cours, on trouve $k = \dfrac{5}{2+1} = \dfrac{5}{3}$. Les solutions de l'équation sont donc les :

$$z : t \mapsto \left(\frac{5}{3}t + \lambda\right) e^t + \mu e^{-2t}, \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Enfin, les conditions initiales s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda + \mu &=& -1 \\ \dfrac{5}{3} + \lambda - 2\mu &=& 5 \end{array} \right. ,$$

c'est-à-dire :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} \lambda &+& \mu &=& -1 \\ \lambda &-& 2\mu &=& \dfrac{10}{3} \end{array} \right. ,$$

d'où $\lambda = \dfrac{4}{9}$ et $\mu = -\dfrac{13}{9}$, et finalement :

$$z : t \mapsto \left(\frac{5}{3}t + \frac{4}{9}\right) e^t - \frac{13}{9} e^{-2t}.$$

3. On sait maintenant que y est solution de l'équation :

$$y' - y = \left(\frac{5}{3}t + \frac{4}{9}\right) e^t - \frac{13}{9} e^{-2t}.$$

L'équation homogène $y_h' - y_h = 0$ a pour solutions les

$$y_h : t \mapsto \lambda e^t, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

On cherche une solution particulière sous la forme $y_p : t \mapsto \lambda(t) e^t$, avec :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \lambda'(t) e^t = \left(\frac{5}{3}t + \frac{4}{9}\right) e^t - \frac{13}{9} e^{-2t},$$

c'est-à-dire

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \lambda'(t) = \frac{5}{3}t + \frac{4}{9} - \frac{13}{9} e^{-3t},$$

donc

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \lambda(t) = \frac{5}{6}t^2 + \frac{4}{9}t + \frac{13}{27} e^{-3t}$$

convient. L'équation a donc pour solutions les :

$$y : t \mapsto \lambda e^t + \frac{5}{6}t^2 e^t + \frac{4}{9} t e^t + \frac{13}{27} e^{-2t}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Enfin, il suffit de prendre en compte la condition initiale $y(0) = 0$, deux conditions initiales ayant été prises en compte dans le calcul de z. On a : $0 = \lambda + \frac{13}{27}$, c'est-à-dire $\lambda = -\frac{13}{27}$. Finalement, on trouve :

$$y : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \frac{5}{6}t^2 e^t + \frac{4}{9} t e^t - \frac{13}{27} e^t + \frac{13}{27} e^{-2t} \end{array} \right. .$$

Exercice 2.

On applique la méthode du pivot :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & + & ay & & & = & 1 \\ x & & & + & az & = & -1 \end{array}\right. \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1,\\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & (a-1)y & - & z & = & 1 \\ & & -y & + & (a-1)z & = & -1 \end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow -L_3,\\ L_3 \leftarrow L_3 - (a-1)L_2}}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & y & - & (a-1)z & = & 1 \\ & & & & a(a-2)z & = & 2-a \end{array}\right. \quad (*)$$

$$\underset{\substack{\text{si } a \neq 0 \text{ et } a \neq 2\ :\\ L_3 \leftarrow \frac{L_3}{a(a-2)},\\ L_2 \leftarrow L_2 + (a-1)L_3,\\ L_1 \leftarrow L_1 - L_2 - L_3}}{\iff} \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & \frac{1}{a} \\ z & = & -\frac{1}{a} \end{array}\right. .$$

donc, si $a \neq 0$ et $a \neq 2$, le système est de Cramer et a pour unique solution :

$$S = \left\{ \left(0, \frac{1}{a}, -\frac{1}{a}\right) \right\}.$$

Si $a = 0$: alors, dans $(*)$, la troisième ligne est une condition de compatibilité non vérifiée, donc $S = \emptyset$.

Si $a = 2$: alors la condition de compatibilité est vérifiée, et :

$$(*) \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & & & + & 2z & = & -1 \\ & & y & - & z & = & 1 \end{array}\right. ,$$

donc le système admet 2 pivots et 1 paramètre. L'ensemble de ses solutions est la droite de $\mathbb{R}^3$:

$$S = \{(-1-2z, 1+z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}.$$