Corrigé du DS 4 (4 heures) : Type CCINP

La rédaction, l'argumentation et la présentation matérielle entrent dans une part significative de la notation; vous devrez aussi respecter la terminologie et les règles d'usage en vigueur. Les exercices, problèmes sont indépendants. Les résultats numériques seront encadrés et simplifiés. Si vous êtes amené à repérer ce qui peut vous sembler une erreur d'énoncé, vous êtes prié de le signaler sur votre copie et devrez poursuivre votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous prendriez.

Calculatrices NON autorisées.

Exercice 1.

Dans tout l'exercice, I est le segment $[0,1]$ et f la fonction définie sur I par : $x \mapsto \begin{cases} x^{-x} = exp(-x\ln(x)) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur I par :

- $\forall x \in I,\ f_0(x) = 1.$
- $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in I,\ f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{(-1)^n}{n!}(x\ln(x))^n & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Montrer que f et toutes les fonctions f_n sont continues sur I.
2. Soit a un réel. Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{a^n}{n!}$? Quelle en est la somme en cas de convergence?
3. On considère la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f_n$.
   Démontrer que cette série de fonctions converge simplement sur I; en préciser la somme.
4. Etudier les variations de la fonction φ continue sur I, définie pour tout $t \in]0,1]$ par $\varphi(t) = t\ln(t)$.
5. Représenter graphiquement la fonction φ sur I en précisant les tangentes aux bornes.
6. Démontrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement sur I.
7. On pose pour tout réel x et lorsque cela est possible $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$.
   7.1. Montrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$ converge pour $x > 0$.
   7.2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Prouver, à l'aide d'une intégration par parties, que $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$.
   7.3. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}*$, $\Gamma(n+1) = n!$.
8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer l'intégrale $J_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)dt$.
   On pourra effectuer le changement de variable $u = -\ln(t)$.
9. On pose $J = \displaystyle\int_0^1 f(t)dt$. Montrer que l'on a : $J = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n}$.
10. Etablir que, pour $n \geq 4$, $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} k^{-k} \leq \frac{1}{4(5^n)}$. En déduire une valeur de n telle que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^{-k}$ soit une valeur approchée de J à 10^{-6} près.

Solution : 1)Pour f_0 c'est immédiat; on suppose $n \geq 1$. Ces fonctions sont continues sur $[0, 1[$ par opérations sur des fonctions notoirement continues. En 0 la limite usuelle : $x\ln(x) \to 0$ assure la continuité de f et des f_n (pour tout $n \geq 1$) en 0. Ainsi ces fonctions sont elles toutes continues sur I■
2) Cours■
3) On va montrer que si $x \in I$ est fixé, la série à termes réels $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ converge.
Si $x = 0$, cela va de soi puisqu'on a affaire à la série nulle à partir du rang 1(dont la somme vaut $f_0(0) = 1$). Si $x \neq 0$, on reconnaît une série exponentielle d'argument $-x\ln(x)$ dont on sait qu'elle converge (absolument) et qu'elle admet pour somme : $exp(-x\ln(x))$.
Conclusion : la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur I et sa somme est la fonction f■
4) ϕ est dérivable sur son intervalle de définition et $\phi'(t) = \ln(t) + 1$, pour $0 < t \leq 1$. Ainsi ϕ décroît sur l'intervalle $]0, 1/e]$ puis croît. On notera aussi que $-\dfrac{1}{e} \leq \phi(t) \leq 0$, pour $t \in I$■
5) Aucune difficulté pour tracer cette courbe dont les tangentes sont verticale pour la borne gauche et de pente 1 pour la droite■
6) Pour $n \geq 1$ et $x \in I$, $|f_n(x)| \leq \dfrac{\exp(-n)}{n!}$. Cette inégalité montre bien (puisque le majorant est le terme général d'une série (exponentielle) convergente) que la série de de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement sur I■
7.1) Notons f l'intégrande de $\Gamma(x)$. Il vient successivement.
$*$ f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
$*$ Deux bornes à problème : 0 et ∞.
$*$ f est positive sur $\mathbb{R}_+^*$ donc convergence = absolue convergence.
$*$ En 0 : $f(t) \sim \dfrac{1}{t^{1-x}}$ et l'intégrale généralisée (Riemann) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^{1-x}}$ converge. Ainsi, par comparaison, $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$ converge.
$*$ En $+\infty$: $t^2 f(t) = \dfrac{t^{x+1}}{e^t} \to 0$, ce par croissance comparée usuelle. Il en résulte que $f(t) = o(\dfrac{1}{t^2})$ en $+\infty$ dès lors par la règle de Riemann et par comparaison, $\displaystyle\int_1^\infty f(t)dt$ converge.

$\boxed{\text{Conclusion : } \displaystyle\int_0^\infty f(t)dt \text{ converge.}}$

7.2) Puisque $n \geq 1$ $t^n e^{-t} = 0$ pour $t = 0$ et par ailleurs $t^n e^{-t} \underset{t\to+\infty}{\to} 0$, il est possible de procéder à une IPP généralisée (les fonctions en jeu sont de classe C^∞) dans l'intégrale généralisée $\Gamma(n + 1)$.
Ceci donne, avec ce qui précède, $\Gamma(n + 1) = [t^n(-e^{-t})]_0^{+\infty} + n\Gamma(n) = 0 - 0 + n\Gamma(n) = \Gamma(n)$■
7.3) Grâce aux intégrales généralisées de référence : $\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1$ et, par récurrence facile, le résultat s'obtient aisément■
8) Soit $n \geq 1$. On sait que f_n est continue sur I donc J_n existe bien (on peut bien sûr la considérer comme une intégrale généralisée convergente). On pose $t = e^{-u}$, pour $u \in \mathbb{R}_+^*$ (changement de variable C^1, strictement décroissant sur $\mathbb{R}_+^*$ et réalisant une bijection de cet intervalle sur $]0, 1[$) dans J_n et on obtient (égalité de valeurs d'IG convergentes) : $J_n = \dfrac{(-1)^n}{n!}\displaystyle\int_0^\infty (e^{-u}(-u))^n e^{-u}du = \frac{1}{n!}\int_0^\infty u^n e^{-(n+1)u}du$.
On procède dans cette dernière intégrale au changement de variable affine $u = \dfrac{v}{n+1}$, qui donne $J_n = \dfrac{1}{(n+1)^{n+1}n!}\displaystyle\int_0^\infty v^n e^{-v}dv = \frac{1}{(n+1)^{n+1}n!}\Gamma(n+1) = \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$ (en utilisant 7.3))■
9) $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur le **segment** I, segment sur lequel la série de de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement.
Le **théorème d'intégration terme à terme sur un segment** stipule que $\displaystyle\int_0^1 (\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)dt) = \sum_{n=0}^{\infty}(\int_0^1 f_n(t)dt)$ soit aussi $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 f_0(t)dt + \sum_{n=1}^{\infty} J_n$. Autrement dit et avec Q8 : $J = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{k=1}^{+\infty} k^{-k}$■
10) Pour $n \geq 4$ et $k \geq n+1$, $k^k \geq 5^k$ donc, pour ces mêmes n, $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} k^{-k} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{5^k} = \frac{1}{4(5^n)}$ (reste d'ordre

n d'une série géométrique).
En utilisant la majoration précédente et Q9 il suffit de préciser un entier n tel que $\dfrac{1}{4(5^n)} \leq 10^{-6}$. On cherche donc n tel que $5^n \geq 25 \times 10^4 \iff 5^{n-6} \geq 16$. On peut donc proposer $n = 8$■

. . . .

Exercice 2.

Notations et définitions

- $\mathbb{K}$ désigne l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices à n lignes et m colonnes et à coefficients dans $\mathbb{K}$. $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ est plus simplement noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ peut être considéré comme élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
- On identifie un élément de $x \in \mathbb{K}^n$ à une matrice colonne et si $x = (x_1, \dots, x_n)$, on note $\|x\|_\infty = \max\{|x_i| \mid 1 \leq i \leq n\}$.
- Une suite $(M_p)_{p\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ est dite convergente si toutes les suites coordonnées $(M_p(i,j))_{p\in\mathbb{N}}$ $(1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m)$ convergent. La limite est alors l'élément de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ dont les coefficients sont les limites des suites coordonnées.
- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\mathrm{Sp}(A)$ l'ensemble des valeurs propres complexes de A et on note

  $$\rho(A) = \max_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)} |\lambda|$$

  Cette quantité s'appelle le rayon spectral de A.

Objectifs

L'objet de ce problème est d'étudier la suite des puissances d'une matrice stochastique.

1 Cas $n = 2$

On suppose dans cette partie que $n = 2$ et, pour $\alpha \in [0,1]$ et $\beta \in [0,1]$ avec $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$, on note : $A(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$.
Il pourra être utile de noter $\lambda = 1 - (\alpha + \beta)$.

1. Montrer que 1 est valeur propre de $A(\alpha,\beta)$ et déterminer le sous-espace propre associé.
2. Montrer que $A(\alpha,\beta)$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Préciser ces éléments propres.
3. En déduire que si on pose $P = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & -\beta \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, on a $A(\alpha,\beta) = PDP^{-1}$.
4. Exprimer, pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, la matrice $A(\alpha,\beta)^p$ à l'aide de P, D et p.
5. Montrer que, pour $(\alpha,\beta) \neq (1,1)$, la suite $(A(\alpha,\beta)^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice $L(\alpha,\beta)$ que l'on précisera. Que se passe-t-il pour $(\alpha,\beta) = (1,1)$?

2 Spectre des matrices stochastiques

Dans cette partie, les matrices considérées sont carrées d'ordre $n \geq 2$. On dit qu'une matrice $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est stochastique (respectivement strictement stochastique) si et seulement si elle est à coefficients positifs (respectivement strictement positifs) et

$$\forall i \in \{1,\ldots,n\},\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$$

2.1 Coefficients

1. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique (respectivement strictement stochastique). Montrer que pours tous i, j compris entre 1 et n on a
$$0 \leq a_{i,j} \leq 1 \ \ \text{(respectivement } 0 < a_{i,j} < 1)$$
2. Montrer qu'une matrice A à coefficients réels positifs est stochastique si et seulement si 1 est valeur propre de A et le vecteur e de coordonnées $(1,\ldots,1)$ est un vecteur propre associé.
3. Montrer que le produit de deux matrices stochastiques (respectivement strictement stochastiques) est une matrice stochastique (respectivement strictement stochastique).

2.2 Valeurs propres

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique.

1. Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{C}^n,\ \forall p \in \mathbb{N},\ \|A^p x\|_\infty \leq \|x\|_\infty$$
2. Montrer que $\rho(A) = 1$.

2.3 Diagonale strictement dominante

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite à diagonale strictement dominante si et seulement si

$$\forall i \in \{1,\ldots,n\},\ |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{i,j}|$$

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ quelconque et soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A. Montrer qu'il existe $i \in \{1,\ldots,n\}$ tel que
$$|\lambda - a_{i,i}| \leq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{i,j}|$$
2. Montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à diagonale strictement dominante est inversible.

2.4 Valeur propre de module maximal

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice strictement stochastique.

1. On désigne par $A_1 = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ la matrice extraite de A en supprimant sa dernière ligne et sa dernière colonne. Montrer que la matrice $A_1 - I_{n-1}$ est à diagonale strictement dominante. Que peut-on en déduire quant au rang de $A - I_n$?
2. Montrer que $\ker(A - I_n)$ est de dimension 1.
3. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \setminus \{1\}$. Montrer que $|\lambda| < 1$.

3 Puissances d'une matrice stochastique

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice strictement stochastique. On note

$$m = \min_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}$$

Pour tout entier naturel non nul p, on note $a_{i,j}^{(p)}$ le coefficient d'indice (i,j) de A^p :

$$A^p = (a_{i,j}^{(p)})_{1\leq i,j\leq p}$$

Enfin, pour tout entier j compris entre 1 et n, on note

$$m_j^{(p)} = \min_{1\leq k\leq n} a_{k,j}^{(p)},\ M_j^{(p)} = \max_{1\leq k\leq n} a_{k,j}^{(p)}$$

1. **Encadrement**
   Montrer que, pour tout entier naturel non nul p et tout entier j compris entre 1 et n, on a :
   $$0 < m_j^{(p)} \leq m_j^{(p+1)} \leq M_j^{(p+1)} \leq M_j^{(p)}$$
2. **Minoration**
   Montrer que, pour tout entier naturel non nul p et tout entier j compris entre 1 et n, on a :
   $$m_j^{(p+1)} - m_j^{(p)} \geq m(M_j^{(p)} - m_j^{(p)}) \ \text{ et } \ M_j^{(p)} - M_j^{(p+1)} \geq m(M_j^{(p)} - m_j^{(p)})$$
3. **Majoration**
   Montrer que, pour tout entier naturel non nul p et tout entier j compris entre 1 et n, on a :
   $$M_j^{(p+1)} - m_j^{(p+1)} \leq (1-2m)(M_j^{(p)} - m_j^{(p)})$$
4. **Convergence de ces suites**
   En déduire que, pour tout j entre 1 et n, les suites $(m_j^{(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ et $(M_j^{(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
5. **Conclusion**
   En déduire que la suite $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice L stochastique dont toutes les lignes sont identiques. Peut-on en déduire l'expression de L?

Solution : Partie 1
1) On résout le système $A(\alpha,\beta)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dont l'ensemble des solutions est $Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$. Ce qui montre bien que 1 est valeur propre de $A(\alpha,\beta)$ et précise l'espace propre associé■
$\begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$.
2) Comme 1 est déjà vp de $A(\alpha,\beta)$, en regardant la trace de cette matrice on détecte l'autre valeur propre : $1-\alpha-\beta = \lambda \neq 1$ (ce puisque α et β sont positifs et non tous les deux nuls. Notre matrice est d'ordre 2 et possède 2 valeurs propres différentes, elle est bien dz et ses espaces propres sont des droites vectorielles. Pour achever de répondre, il nous faut préciser l'espace propre associé à λ.
Un calcul simple montre que ce dernier est $Vect(\begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \end{pmatrix})$■
3) Puisque $A(\alpha,\beta)$ est diagonalisable avec $1,\lambda$ comme valeurs propres, on sait, C_1 (resp. C_2) étant une colonne propre associée à 1 (resp. λ) et P étant la matrice de colonnes C_1, C_2, que $A(\alpha,\beta) = PDP^{-1}$. Fort de ceci et compte tenu de Q1 et Q2, il est légitime de prendre pour P la matrice proposée par l'énoncé■
4) Maintes fois rabâché : on trouve $A(\alpha,\beta)^p = PD^pP^{-1}$■
5) La convergence de la suite $(A(\alpha,\beta)^p)$ équivaut (propriété limite et produit matriciel) à celle de la suite (D^p). Or, pour tout entier naturel p, $D^p = diag(1,\lambda^p)$ par ailleurs $\lambda = 1-\alpha-\beta < 1$ (α,β positifs et non nuls tous les deux) mais aussi $\lambda = 1-\alpha-\beta \geq -1$ (car α, β inférieurs à 1) et cette dernière inégalité est une égalité ssi $\alpha = \beta = 1$.
Récapitulons si $(\alpha,\beta) \neq (1,1)$, $|\lambda| < 1$ donc la suite (λ^p) converge vers 0 et la suite (D^p) converge vers

$diag(1,0)$.
Sinon cette suite diverge puisque la suite $((-1)^p)$ diverge.
Dans le cas de convergence la limite vaut $L(\alpha,\beta) = Pdiag(1,0)P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = \dfrac{1}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ ■
Partie 2
Coefficients
1)Assez évident■
2) Matriciellement on constate que $Ae = e \iff \forall i \in \{1,\dots,n\},\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$■
3) Soient A,B deux matrices stochastiques (resp. strictement stochastiques) de même taille.
Alors, en vertu de la question précédente, $ABe = A(Be) = Ae = e$ donc AB est déjà stochastique.
Le coefficient d'indice $1,1$ de AB est $\sum_{k=1}^{n} a_{1,k}b_{k,1} > 0$ donc AB est bien strictement stochastique■
Valeurs propres
1) Soient $B = (b_{i,j})$ une matrice stochastique, $x \in \mathbb{C}^n$ et $1 \le i \le n$ alors $|(Bx)_i| = |\sum_{j=1}^{n} b_{i,j}x_j|$. Puis par inégalité triangulaire et positivité des coefficients de B, il vient : $|(Bx)_i| \le \sum_{j=1}^{n} b_{i,j}|x_j| \le (\sum_{j=1}^{n} b_{i,j})\|x\|_\infty$, ce par définition de la norme $\|.\|_\infty$.
La stochasticité de B donne $\forall i, |(Bx)_i| \le \|x\|_\infty$ soit $\|Bx\|_\infty \le \|x\|_\infty$.
La question précédente prouve que, A étant stochastique, A^p l'est aussi; en prenant $B = A^p$ dans l'inégalité précédente nous avons notre réponse■
2) Choisissons dans le résultat de la question précédente $p = 1$ et x, vecteur propre associé à la valeur propre de A de module maximal, celle-ci étant notée μ.
Nous obtenons $\|\mu x\|_\infty \le \|x\|_\infty$ soit (homogénéité) $0 \le (1 - |\mu|)\|x\|_\infty$.
Un vecteur propre étant différent du vecteur nul, sa norme est strictement positive donc $|\mu| \le 1$.
mais d'après la sous-partie précédente $1 \in Sp(A)$, il en résulte bien que $\rho(A) = 1$■
Diagonale strictement dominante
1) Soit à nouveau x un vecteur propre associé cette fois à λ et soit i un entier tel que $|x_i| = \|x\|_\infty$. Considérons la $i-ème$ ligne de l'égalité matricielle $Ax = \lambda x$, elle signifie que $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j = \lambda x_i$. Comme x est vp de A, $x_i \neq 0$ donc en divisant par ce nombre, il vient $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\dfrac{x_j}{x_i} = \lambda \iff \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{i,j}\dfrac{x_j}{x_i} + a_{i,i} = \lambda$.
De là on déduit que $|\sum_{j=1,j\neq i}^{n} a_{i,j}\dfrac{x_j}{x_i}| = |\lambda - a_{i,i}|$.
Par inégalité triangulaire, il vient $|\lambda - a_{i,i}| \le \sum_{j=1,j\neq i}^{n} |a_{i,j}||\dfrac{x_j}{x_i}| \le \sum_{j=1,j\neq i}^{n} |a_{i,j}|$ (parce que par la définition de i : $|\dfrac{x_j}{x_i}| \le 1$)■
2) Si A n'était pas inversible 0 en serait une valeur propre et une inégalité du type de Q2 serait vraie pour $\lambda = 0$ et cela contredit la propriété de diagonale strictement dominante donc A est inversible■
Valeur propre de module maximal
1)et 2) Posons $B = A_1 - I_{n-1} = (b_{i,j})$ et prenons $1 \le i \le n-1$ alors $|b_{i,i} = a_{i,i} - 1| = 1 - a_{i,i} = \sum_{j=1,j\neq i}^{n} a_{i,j}$ (par stochasticité).
Dès lors par stricte positivité de $a_{i,n}$, nous obtenons $|b_{i,i}| > \sum_{j=1,j\neq i}^{n-1} a_{i,j} = \sum_{j=1,j\neq i}^{n-1} |b_{i,j}|$; ce qui montre bien que $A_1 - I_{n-1}$ est à diagonale strictement dominante.
Cette matrice est donc inversible et ceci prouve que les $n-1$ premières colonnes de $A - I_n$ sont libres ainsi le rang de $A - I_n$ est au moins égal à $n-1$. Mais comme 1 est valeur propre de A, ce rang ne peut être égal à n. Conclusion il vaut $n-1$ et, formule du rang, $\ker(A - I_n)$ est de dimension 1■
3) Soient $\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \setminus \{1\}$ tel que $|\lambda| = 1$ et $x = (x_1, ..., x_n)$ un vecteur propre associé et en notant à nouveau i un entier tel que $|x_i| = \|x\|_\infty$ puis en utilisant Q1 de la partie 2.3 (qui ne se servait pas de la propriété de diagonale strictement dominante), nous avons par stochasticité

$|\lambda - a_{i,i}| \leq \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} |a_{i,j}| = \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} |a_{i,j} = 1 - a_{i,i}.$

En posant (puisque λ est de module 1) $\lambda = e^{i\theta}$, cette inégalité (dont on élève les membres au carré) donne $(\cos(\theta) - a)^{+}\sin^2(\theta) \leq (a-1)^2$ (on a posé $a_{i,i} = a$). Après développement et simplification nous trouvons $2a(1-\cos(\theta)) \leq 0$. Comme a est strictement positif ceci entraîne que θ est multiple de 2π donc que $\lambda = 1$, ce qui est absurde. Finalement $|\lambda| < 1$ si $\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \setminus \{1\}$■

Partie 3

p est un entier naturel non nul dans les trois premières questions et j est un entier fixé entre 1 et n dans cette partie.

1) L'inégalité de gauche est évidente puisque A est strictement stochastique, la troisième en partant de la gauche vient de l'évidence $min \leq max$.

Par ailleurs, pour $1 \leq k \leq n$, $a_{k,j}^{(p+1)} = \sum_{i=1}^{n} a_{k,i}a_{i,j}^{p} \geq \sum_{i=1}^{n} a_{k,i}m_j^{(p)} = m_j^{(p)}$ (par stochasticité), il en résulte la seconde inégalité en partant de la gauche. La même stratégie fournit la dernière inégalité■

2) Soit k tel que $m_j^{(p+1)} = a_{k,j}^{(p+1)} = \sum_{i=1}^{n} a_{k,i}a_{i,j}^{p}$ donc (par stochasticité) $m_j^{(p+1)} - m_j^{(p)} = \sum_{i=1}^{n} a_{k,i}(a_{i,j}^{p} - m_j^{(p)})$.

En notant l un indice pour lequel $a_{l,j}^{p} = M_j^{(p)}$ et par positivité des $a_{k,i}$ et des $a_{i,j}^{p} - m_j^{(p)}$, nous obtenons, par l'égalité précédente, $m_j^{(p+1)} - m_j^{(p)} \geq a_{k,l}(a_{l,j}^{p} - m_j^{(p)}) = a_{k,l}(M_j^{(p)} - m_j^{(p)}) \geq m(M_j^{(p)} - m_j^{(p)})$.

De même en considérant k tel que $M_j^{(p+1)} = a_{k,j}^{(p+1)} = \sum_{i=1}^{n} a_{k,i}a_{i,j}^{p}$, il vient $M_j^{(p)} - M_j^{(p+1)} = \sum_{i=1}^{n} a_{k,i}(M_j^{(p)} - a_{i,j}^{p})$ donc, en posant s un entier tel que $m_j^{(p)} = a_{s,j}^{p}$, nous avons bien $M_j^{(p)} - M_j^{(p+1)} \geq a_{k,s}(M_j^{(p)} - a_{s,j}^{p}) = a_{k,s}(M_j^{(p)} - m_j^{(p)}) \geq m(M_j^{(p)} - m_j^{(p)})$■

3) En utilisant la question précédente $M_j^{(p+1)} - m_j^{(p+1)} \leq M_j^{(p)} - m(M_j^{(p)} - m_j^{(p)}) - (m_j^{(p)} + m(M_j^{(p)} - m_j^{(p)}) = (1-2m)(M_j^{(p)} - m_j^{(p)})$■

4) Par Q1 la suite $(m_j^{(p)})_p$ est croissante, la suite $(M_j^{(p)})_p$ est décroissante et, pour tout $p \geq 1$, $m_j^{(p)} \leq M_j^{(p)}$.

Posant $k = 1 - 2m \in [0,1[$, il vient par Q3 et par récurrence $0 \leq M_j^{(p)} - m_j^{(p)} \leq k^{p-1}(M_j^{(1)} - m_j^{(1)})$; ce qui prouve que la suite $(M_j^{(p)} - m_j^{(p)})_p$ converge vers 0 et montre l'adjacence voulue ■

5) Q4 permet via le théorème des gendarmes de vérifier que la suite $(a_{i,j}^{(p)})$ converge vers un réel positif (qui est le même pour tout j donc) par conservation des inégalités à la limite.

La matrice limite possède bien des lignes identiques.

Pour tout entier p, $A^p e = e$ donc par compatibilité limite et produit matriciel $Le = e$.

De ceci on déduit que la suite $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice L stochastique.

Le cas $n = 2$ étudié tout au début du problème montre que non.