Corrigé du DS 4 (4 heures): Type Centrale-Mines

La rédaction, l'argumentation et la présentation matérielle entrent dans une part significative de la notation; vous devrez aussi respecter la terminologie et les règles d'usage en vigueur. Les exercices, problèmes sont indépendants. Les résultats numériques seront encadrés et simplifiés. Si vous êtes amené à repérer ce qui peut vous sembler une erreur d'énoncé, vous êtes prié de le signaler sur votre copie et devrez poursuivre votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous prendriez.

Calculatrices **NON** autorisées.

Exercice 1

I Fonction zêta

On note ζ la fonction de la variable réelle x définie par :

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

On note D_ζ son ensemble de définition.
1) Déterminer D_ζ.
2) Montrer que ζ est continue sur D_ζ.
3) Etudier le sens de variations de ζ.
4) Justifier que ζ admet une limite en $+\infty$. La déterminer.
5) Soit $x \in D_\zeta$ et soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$.
Montrer : $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leq \frac{1}{n^x} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t^x}$.
6) En déduire, que pour tout $x \in D_\zeta$,

$$1 + \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \leq \zeta(x) \leq 1 + \frac{1}{x-1}.$$

7) Déterminer la limite de $\zeta(x)$ lorsque x tend vers 1 par valeurs supérieures.
8) Retrouver la limite de $\zeta(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
9) Donner l'allure de la courbe représentative de ζ.

II Etude d'une fonction définie par une somme

Dans cette partie, f désigne la fonction définie par

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n} \right).$$

On note D_f l'ensemble de définition de f.

II.A - Ensemble de définition et variations

10) Déterminer D_f.
11) Montrer que f est continue sur D_f et étudier ses variations.

II.B - Equivalents

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
12) Calculer $f(k)$.
13) En déduire un équivalent de f en $+\infty$.
14) Pour tout $x \in D_f$, vérifier que $x+k \in D_f$, puis calculer $f(x+k)-f(x)$ en travaillant sur les sommes partielles.
15) En déduire un équivalent de f en $-k$.
Quelles sont les limites à droite et à gauche de f en $-k$?

II.C - Dérivées successives

16) Montrer que f est de classe C^∞ sur D_f et calculer $f^{(k)}(0)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

II.D - Expression intégrale de f

Pour $x \in \mathbb{R}_+$ fixé, on pose $g(t) = \dfrac{t^x - 1}{1-t}$, ce pour $t \in [0,1[$.
17) Montrer que g se prolonge par continuité au segment [0,1]. Expliciter ce prolongement.
18) Justifier l'existence d'un réel positif M tel que , pour tout $t \in [0,1[$: $|\dfrac{t^x-1}{1-t}| \leq M$.
19) En remarquant que, pour tout $t \in [0,1[$, $\dfrac{1}{1-t} = \sum\limits_{n=0}^{N} t^n + \dfrac{t^{N+1}}{1-t}$, ce pour tout entier naturel N,
montrer que $\forall x \geq 0 :\quad f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x-1}{1-t} dt$.
20) Prouver que l'égalité précédente reste valable pour $x > -1$.
21) En déduire une expression de $f(\dfrac{k}{2})$, pour k entier relatif supérieur ou égal à -1.

Solution : 1) 0n cherche donc l'ensemble des réels x tels que la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^x}$ converge. Ceci se produit (critère de Riemann) ssi $x > 1$ donc $\boxed{D_\zeta =]1, +\infty[}$ ■
2) Posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 1$, $u_n(x) = \dfrac{1}{n^x} = \exp(-x\ln(n))$ en vue d'appliquer **le théorème de continuité pour les séries de fonctions**.
Pour cela on note déjà que chaque u_n est notoirement continue sur D_ζ.
Prenons un segment $[a,b] \subset D_\zeta$ (notez que ceci implique $a > 1$) et établissons la convergence normale sur ce segment de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$.
Soit $n \geq 1$, $\forall x \in [a,b], |u_n(x)| = \exp(-x\ln(n)) \leq \exp(-a\ln(n))$ (par croissance de l'exponentielle). Ainsi $\forall n \geq 1, \forall x \in [a,b], |u_n(x)| \leq \dfrac{1}{n^a}$ et la série de Riemann $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^a}$ converge (puisque $a > 1$), nous avons établi la convergence normale voulue.
Le théorème de continuité, appliqué ici à la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$, assure de la continuité de la somme de cette série de fonctions sur D_ζ.
Autrement dit ζ est continue sur son domaine de définition ■
NB : Nous avons en fait montré que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ convergeait normalement sur tout intervalle du type $[a, \infty[$, où $a > 1$.
3) Chaque u_n est décroissante sur D_ζ donc, par croissance des sommes de séries convergentes, ζ y décroît■
4) Tout d'abord la positivité de la fonction ζ et sa décroissance font qu'elle admet une limite (finie et positive) en $+\infty$.
De plus pour $n \geq 2$ $u_n(x) = \exp(-x\ln(n)) \underset{x\to+\infty}{\to} 0$ (en effet $\ln(n) > 0$ alors que $u_1(x) = 1 \underset{x\to+\infty}{\to} 1$.
Il en résulte bien que chaque u_n possède une limite en $+\infty$ et, puisque (comme observé ci-dessus)la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ converge normalement sur $[2, \infty[$, nous pouvons utiliser le théorème de la double-limite qui nous dit ici que : $(\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n)(x) \underset{x\to+\infty}{\to} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lim\limits_{x\to+\infty} u_n(x) = 1$. Soit aussi $\boxed{\zeta(x) \underset{x\to+\infty}{\to} 1}$ ■

5) Posons, pour $x > 1$ et $t \geq 1$, $g_x(t) = t^{-x}$. Cette fonction est positive et décroissante. Il en résulte immédiatement l'encadrement demandé■
$x > 1$ est fixé dans la question suivante.
6) En sommant l'encadrement précédent de 2 à l'infini (la convergence de la STP $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^x}$ nous certifie que les intégrales générlisées utilisées convergent, ce que vous pouvez vérifier aussi) nous obtenons :
$\int_2^{+\infty} g_x(t)dt \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x}dt$
Puis en ajoutant 1 à chaque membre de cet encadrement et en observant qu'une primitive de g_x est $t \to \frac{t^{-x+1}}{1-x}$, il vient (après utilisation du théorème fondamental du calcul intégral généralisé) :
$1 + [\frac{t^{-x+1}}{1-x}]_{t=2}^{t=+\infty} \leq \zeta(x) \leq 1 + [\frac{t^{-x+1}}{1-x}]_{t=1}^{t=+\infty}$ soit finalement $\boxed{1 + \frac{1}{(x-1)2^{x-1}} \leq \zeta(x) \leq 1 + \frac{1}{x-1}}$■
7) On a immédiatement avec la fonction minorante de l'encadrement précédent $\boxed{\zeta(x) \underset{x\to 1}{\to} +\infty}$■
8) On retrouve le résultat établi en Q4 grâce à Q6 et au théorème des gendarmes■
10) Pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}^* = X$, nous posons $f_n(x) = \frac{1}{n+x} - \frac{1}{n}$.
Fixons $x \in X$ et montrons que la série $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge (absolument).
En effet $|f_n(x)| = \frac{|x|}{n(n+x)}$ (pour n assez grand) donc $|f_n(x)| \sim \frac{|x|}{n^2}$, ce qui montre bien l'assertion en vue.
La série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur X donc f est au moins définie sur cet ensemble mais on ne peut évidemment pas faire plus donc $X = D_f$■
11) On va à nouveau employer **le théorème de continuité pour les séries de fonctions**.
Chaque f_n est continue sur X (qui n'est pas un intervalle).
Prenons un segment $[a, b]$ inclus dans X et fixons un entier naturel $n \geq 1$; il existe un entier m tel que $n + a > 0$ pour tout $n \geq m$. On peut décomposer $f = (\sum_{n=1}^{m-1} f_n) + \sum_{n=m}^{\infty} f_n$ et, $\sum_{n=1}^{m-1} f_n$ étant continue sur $[a, b]$ (comme SOMME FINIE de telles fonctions sur ce segment), il nous suffit de vérifier la CVN sur $[a, b]$ de la série de fonctions $\sum_{n\geq m} f_n$. Or $\forall x \in [a, b]$ et $\forall n \geq m, |f_n(x)| = \frac{|x|}{n(n+x)} \leq \frac{|a|+|b|}{n(n+a)}$. On reconnaît en le majorant le terme général d'une série convergente, nous avons donc bien prouvé que la série de fonctions $\sum_{n\geq m} f_n$ convergeait normalement sur $[a, b]$ et ainsi obtenu la continuité de f sur un tel segment (via le théorème de continuité); le caractère quelconque de ce segment fait que cette continuité s'étend bien à D_f.
Les fonctions f_n sont toutes décroissantes sur chaque intervalle inclus dans D_f donc (cf Q3), f possède cette même propriété■
12) et 14) En premier lieu si $x \in D_f$ c'est que x n'est pas un entier relatif strictement négatif, ce qui est aussi le cas de $x + k$ qui est bien dans D_f.
Pour $x \in D_f$, $f(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty}((\frac{1}{n+1+x} - \frac{1}{n+1}) + (\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}))$ Par linéarité de la somme des séries convergentes (les termes généraux sont des $O(1/n^2)$), et télescopage classique (et fait bien souvent via les sommes partielles) nous obtenons :
$f(x+1) = f(x) - f_1(x) - 1$ ou $\boxed{f(x+1) = f(x) - \frac{1}{x+1} \ (*)}$.
On somme alors les relations (*) écrites pour $x, x+1, ..., x+k-1$ et, après un télescopage simplificateur, il vient : $\boxed{f(x+k) = f(x) - \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{x+i} \ (**)}$ et, en spécialisant en 0 $f(k) = f(0) - \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i}$ soit $\boxed{f(k) = -H_k \ (***)}$■
13) On rappelle que si $k \to \infty$, $\boxed{H_k \sim \ln(k)}$ et aussi que $\ln(k+1) \sim \ln(k)$ et qu'enfin (si $E(x)$ désigne la partie entière de x) $E(x) \underset{x\to\infty}{\sim} x$.
La décroissance de f sur $\mathbb{R}_+$ donne ($x \to \infty$) $f(E(x)+1) \leq f(x) \leq f(E(x))$; ce qui précède (via gendarmes) donne que $f(x) \sim -\ln(E(x))$ or $\ln(x) - \ln(E(x)) = \ln(\frac{x}{E(x)}) \underset{x\to\infty}{\to} 0$ donc $\ln(x) \sim \ln(E(x))$ et finalement

$\boxed{f(x) \underset{x\to\infty}{\sim} -\ln(x)}$■

15) (**) donne clairement,f étant continue en 0 : $\boxed{f(x) \underset{x\to -k}{\sim} \frac{1}{x+k}}$.

Il en résulte que la limite à droite (resp. à gauche) est $+\infty$(resp.$-\infty$)■

16) Le parcours du combattant continue, nous allons utiliser le **théorème de dérivation successive terme à terme.**

A cette fin, on observe que toutes les fonctions f_n sont rationnelles donc de classe C^∞ sur D_f; nous savons que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur cet ensemble. Fixons $k \geq 1$ et reprenons les notations utilisées dans notre réponse à Q11; nous allons vérifier que la série de fonctions $\sum_{n\geq m} f_n^{(k)}$ converge normalement sur le segment $[a,b]$ (La SOMME FINIE $\sum_{n=1}^{m-1} f_n$ étant de classe C^∞ sur notre segment, cette fois).

Pour tout $n \geq m$ et tout $x \in [a,b]$, $|f_n^{(k)}(x)| = |\frac{(-1)^k k!}{(x+n)^{k+1}}| \leq \frac{k!}{(n+a)^{k+1}}$. Comme $k \geq 1$, $\frac{k!}{(n+a)^{k+1}}$ est le TG d'une STP convergente.

Bilan 1 : Pour tout $k \geq 1$, $\sum_{n\geq m} f_n^{(k)}$ converge normalement sur le segment $[a,b]$(et CVS sur ce même segment), ceci nous permet de dire que f, par théorème de dérivation terme à terme appliqué à $\sum_{n\geq m} f_n^{(k)}$, que sa somme (donc $f = (\sum_{n=1}^{m-1} f_n) + \sum_{n=m}^{\infty} f_n$ aussi) est de classe C^k sur ce segment et que (avec la décomposition ci-dessus) :

$\boxed{\forall k \geq 1, \forall x \in [a,b], f^{(k)}(x) = (-1)^k k! \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^{k+1}} (\star)}$.

Comme le segment est arbitraire et que tout élément de D_f appartient à un tel segment, nous avons :

Bilan 2 : f est de C^∞ sur D_f et la formule $(\star)$ est valable pour tout $x \in D_f$■

Jusqu'à Q19 x est un réel positif quelconque.

17) g est évidemment continue sur son intervalle de définition et, pour $t \to 1$, $g(t) = \frac{\exp(x\ln(t))) - 1}{1-t} \sim \frac{x\ln(t)}{1-t}$ (car $\exp(u) - 1 \sim u$ pour $u \to 0$). Comme on sait que $\ln(t) \sim t-1$ si $t \to 1$, nous obtenons que $g(t) \to -x$ si $t \to 1$. En posant $\boxed{g(1) = -x}$, on prolonge g par continuité au segment $[0,1]$■

Le prolongement mis en évidence en Q17 se nomme quand même g.

18) g **étant continue sur le SEGMENT [0,1]**, elle y est bornée. Il existe donc un réel positif M tel que :

$\forall t \in [0,1], |g(t)| \leq M$ donc en se restreignant à l'intervalle $[0,1[$, ceci implique que $\forall t \in [0,1[, |\frac{t^x-1}{1-t}| \leq M$■

19) Pour $t \in [0,1[$, nous avons donc $g(t) = \sum_{n=0}^{N} (t^x - 1)t^n + t^{N+1}g(t)$, ce pour tout N.

Mais les deux membres de cette égalité sont des fonctions continues sur $[0,1]$ donc cette égalité se propage à limite en 1 et l'égalité précédente est vérifiée sur $[0,1]$.

Donc par simple intégration sur le segment $[0,1]$ et LINEARITE de l'intégrale, il vient (toujours pour tout N) :

$\int_0^1 dt = \sum_{n=0}^{N} \int_0^1 (t^{x+n} - t^n)dt + \int_0^1 t^{N+1} g(t)dt$ donc que

$\int_0^1 g(t)dt = \sum_{n=0}^{N} (\frac{1}{x+n+1} - \frac{1}{n+1} + \int_0^1 t^{N+1} g(t)dt$ soit aussi que

$|\int_0^1 \frac{t^x-1}{1-t}dt - \sum_{n=1}^{N+1} f_n(x)| = |\int_0^1 t^{N+1} \frac{t^x-1}{1-t}dt| \leq \int_0^1 t^{N+1} |\frac{t^x-1}{1-t}|dt$ (par inégalité triangulaire) ou (avec Q 18)

$|\int_0^1 \frac{t^x-1}{1-t}dt - \sum_{n=1}^{N+1} f_n(x)|| \leq \int_0^1 t^{N+1} M dt = \frac{M}{N+2}$.

En faisant tendre N vers ∞, nous avons $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^x-1}{1-t}dt = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$■

20) Soit $x > -1$. On a donc (Q19) : $f(x+1) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x+1}-1}{1-t}dt$. Mais avec (*) de la réponse à Q12 nous savons que $f(x) = f(x+1) + \dfrac{1}{x+1}$ donc que $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x+1}-1}{1-t}dt + \int_0^1 t^x dt = \int_0^1 (\frac{t^{x+1}-1}{1-t} + t^x)dt = \int_0^1 \frac{t^x-1}{1-t}dt$ (par linarité intégrales généralisées convergentes)■

21) Si k est pair, on a répondu à ce cas en Q12.
Si $k = 2p-1$, où $p \in \mathbb{N}$, on cherche à exprimer $f(p-1/2)$.
D'après Q12/Q14, nous savons que $f(p-1/2) = f(-1/2) - \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{i-1/2}$. Il ne nous reste plus qu'à calculer $f(-1/2) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{-1/2}-1}{1-t}dt$. Ce qui se fait en posant $t = u^2$, où $u \in]0,1[$ et donne $f(-1/2) = 2\displaystyle\int_0^1 \frac{du}{1+u} = 2\ln(2)$ soit ENFIN :

$$\boxed{f(p-1/2) = 2(\ln(2) - \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{2i-1})}$$ ■

Exercice 2

1 Convergence dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie. On suppose qu'il existe une norme $\|.\|$ sur E telle que l'inégalité suivante soit satisfaite pour tout $x \in E$,

$$\|u(x)\| \leq \|x\|.$$

Pour tout entier naturel k non nul, on considère l'endomorphisme

$$r_k = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1} u^l = \frac{1}{k}(I_E + u + u^2 + \cdots + u^{k-1}),$$

où I_E représente l'endomorphisme identité de E.

1) Soit $x \in \ker(u - I_E)$. Déterminer $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} r_k(x)$.

2) Soit $x \in \operatorname{Im}(u - I_E)$. Montrer que $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} r_k(x) = 0_E$.

3) En déduire que $E = \ker(u - I_E) \oplus \operatorname{Im}(u - I_E)$.

4) Soit $x \in E$, un vecteur quelconque. Montrer que la suite $(r_k(x))_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un vecteur de E, que l'on notera $p(x)$. Interpréter géométriquement l'application $p : E \to E$ ainsi définie.

   Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée d'ordre n à coefficients réels. On suppose qu'il existe une norme, aussi notée $\|\cdot\|$, sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ identifié à $\mathbb{R}^n$, telle que, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on ait $\|AX\| \leqslant \|X\|$. Pour tout k entier naturel non nul, on considère la matrice

$$R_k = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1} A^l = \frac{1}{k}(I_n + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}), \tag{2}$$

   où I_n est la matrice identité dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

5) Montrer que la suite de matrices $(R_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers une matrice P, telle que $P^2 = P$.

2 Matrices stochastiques

On fixe dans cette partie un entier $n \geqslant 2$.

Définition 1 *On notera $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ la matrice-colonne dont tous les coefficients sont égaux à 1.*

Définition 2 *Une matrice carrée $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite* **stochastique** *si elle vérifie les conditions suivantes :*

$$\forall (i,j) \in [|1,n|]^2, a_{i,j} \geqslant 0 \ ; \tag{3}$$

$$\forall i \in [|1,n|], \ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1. \tag{4}$$

Nous dirons aussi qu'une matrice-ligne $L = ([\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ est stochastique lorsque ses coefficients λ_i sont tous positifs ou nuls, et de somme égale à 1.

6) Vérifier que la condition (4) équivaut à la condition $AU = U$.

7) En déduire que l'ensemble $\mathcal{E}$ des matrices stochastiques (carrées d'ordre n) est stable pour le produit matriciel.

8) Montrer que cet ensemble $\mathcal{E}$ est une partie fermée et convexe de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On munit l'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de la norme $\|.\|_\infty$ définie par $\|X\|_\infty = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$ si $X = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

9) Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est stochastique, alors on a $\|AX\|_\infty \leqslant \|X\|_\infty$ pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On note $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique, et on suppose qu'il existe un entier naturel non nul p tel que la matrice A^p ait tous ses coefficients strictement positifs. Pour tout k entier naturel non nul, on posera

$$R_k = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{k-1} A^l.$$

10) Montrer que $\ker(A^p - I_n)$ est de dimension 1.
Indication : soit $X = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \ker(A^p - I_n)$, soit $s \in 1, n$ un indice tel que $x_s = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} x_j$, on montrera que $x_j = x_s$ pour tout $j \in 1, n$.

11) En déduire que $\ker(A - I_n) = \text{Vect}(U)$.

12) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la matrice R_k est stochastique.

13) Montrer que la suite $(R_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers une matrice P, stochastique, de rang 1.

14) En déduire que l'on peut écrire $P = UL$, où $L = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est une matrice-ligne stochastique.

15) Montrer que $PA = P$. En déduire que L est la seule matrice-ligne stochastique vérifiant $LA = L$.

16) Montrer que les coefficients de la matrice ligne L sont tous strictement positifs.

17) Montrer que le réel 1 est valeur propre simple de A.

Solution 1) Soit $x \in \ker(u - I_E)$, alors $u(x) = x$ et donc, pour tout entier naturel m, $u^m(x) = x$ et, par voie de conséquence (et pour tout $k \geq 1$) : $r_k(x) = x$; la suite $(r_k(x))_k$ étant constante, on a bien sûr $\boxed{\lim\limits_{k \to +\infty} r_k(x) = x}$ ■

2) Soit $y \in \text{Im}(u - I_E)$, il existe $x \in E$ tel que $y = u(x) - x$ et, pour tout entier naturel m, $u^m(y) = u^{m+1}(x) - u^m(x)$ puis (télescopage), $r_k(y) = \dfrac{1}{k} u^k(x)$, ce pour tout $k \geq 1$.

En passant aux normes : $\forall k \geq 1, \|r_k(y)\| = \dfrac{1}{k} \|u_k(x)\|$ (homogénéité) mais l'inégalité satisfaite par u implique (récurrence mécanique) que $\|u_k(x)\| \leq \|x\|$ soit enfin :

$\forall k \geq 1, 0 \leq \|r_k(y)\| \leq \dfrac{1}{k}\|x\|$.

Le théorème des gendarmes donne alors $\lim\limits_{k\to+\infty} \|r_k(y) - 0_E\| = 0$, ce qui par définition est bien $\boxed{\lim\limits_{k\to+\infty} r_k(y) = 0_E}$ ■

3) La formule du rang, appliquée à $u - I_E$, certifie que $\dim(\ker(u - I_E)) + \dim(\mathrm{Im}(u - I_E)) = \dim(E)$; il nous reste à prouver que nos deux sous-espaces sont en somme directe.

Pour cela prenons $x \in \ker(u - I_E) \cap \mathrm{Im}(u - I_E)$ et montrons que $x = 0_E$.

En utilisant 1) et 2), on a simultanément $\lim\limits_{k\to+\infty} r_k(x) = x$ et $\lim\limits_{k\to+\infty} r_k(x) = 0_E$; par unicité de la limite, on a bien $x = 0_E$ et $\boxed{E = \ker(u - I_E) \oplus \mathrm{Im}(u - I_E)}$ ■

4) On décompose $x \in E$ suivant la somme directe précédente en posant $x = y + z$, où $y \in \ker(u - I_E)$ et $z \in \mathrm{Im}(u - I_E)$.

Tout d'abord, par linéarité de r_k, $r_k(x) = r_k(y) + r_k(z)$, ce pour tout $k \geq 1$, puis (par linéarité des limites et Q1 + Q2) $\lim\limits_{k\to+\infty} r_k(x) = \lim\limits_{k\to+\infty} r_k(y) + \lim\limits_{k\to+\infty} r_k(z) = y + 0_E = y$. Comme y est le projeté de x dans **la projection sur** $\ker(u - I_E)$ **par rapport à** $\mathrm{Im}(u - I_E)$; **p est cette projection**■

5) On pose donc $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $f : X \in E \to AX$, par ce qui précède et, pour tout $X \in E$, la suite $(R_k X)_k$ converge vers PX.

Notons $(X_1, ..., X_n)$ la base canonique de E, par ce qui précède et pour chaque $1 \leq i \leq n$, la suite $(R_k X_i)_k$ converge vers PX_i (ce qui signifie que la suite des i-èmes colonnes des R_k converge vers la i-ème colonne de P) soit que la suite (R_k) converge vers P. D'après Q4 P est une projection donc $P^2 = P$■

6) Immédiat■

7) Si A et B sont à coefficients positifs, leur produit (découle de la définition de celui-ci) possède la même propriété.

Si par ailleurs A et B sont stochastiques, $ABU = A(BU) = AU = U$, ce par Q6. Il en résulte que $\mathcal{E}$ est stable pour le produit matriciel■

8) Soit $(A_m = (a_{i,j}^m)_m$ une suite de matrices de $\mathcal{E}$ convergeant vers $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Nous voulons montrer que $A \in \mathcal{E}$.

Pour tout $(m, i, j) \in \mathbb{N} \times [|1, n|]^2$, $a_{i,j}^m \geq 0$ donc par conservation des inégalités à la limite ($m \to \infty$): $a_{i,j} \geq 0$.

Pour tout $(m, i) \in \mathbb{N} \times [|1, n|]$, $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j}^m = 1$ donc par conservation des inégalités à la limite ($m \to \infty$): $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$.

Finalement A appartient à $\mathcal{E}$ et cet ensemble est bien **un fermé** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit enfin $(A, B, t) \in \mathcal{E}^2 \times [0, 1]$; posons $C = (1 - t)A + tB$ et $A = (a_{i,j}), B = (b_{i,j})$; le coefficient générique de C est donc $(1 - t)a_{i,j} + tb_{i,j}$ qui est bien positif comme somme de produits de tels nombres. De plus $CU = (1 - t)AU + tBU = (1 - t)U + tU = U$. En résumé $\mathcal{E}$est **un convexe** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$■

9) Soit i un entier tel que $\|AX\|_\infty = |(AX)_i|$. On traduit ceci par :

$\|AX\|_\infty = |\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j| \leq \sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j}|x_j| \leq (\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j})\|X\|_\infty = \|X\|_\infty$, ce par inégalité triangulaire, définition de $\|X\|_\infty$ et stochasticité■

10) Même leitmotiv. Avec les hypothèses et notations de l'indication (en posant $A^p = B = (b_{i,j})$) , on considère la s-ième ligne de l'égalité matricielle $BX = X$ qui peut s'écrire :

$x_s = \sum\limits_{j=1}^{n} b_{s,j}x_j$ ou, par stochasticité, $(\sum\limits_{j=1}^{n} b_{s,j})x_s = \sum\limits_{j=1}^{n} b_{s,j}x_j$ donc $\sum\limits_{j=1}^{n} b_{s,j}(x_s - x_j) = 0$.

Or $\forall 1 \leq j \leq n, b_{s,j}(x_s - x_j) \geq 0$ d'où (avec ce qui précède) $\forall 1 \leq j \leq n, b_{s,j}(x_s - x_j) = 0$; comme les coefficients de B sont strictement positifs, on a bien : $\forall 1 \leq j \leq n, x_j = x_s$.

En conclusion $\ker(A^p - I_n) \subset Vect(U)$ mais $AU = U \Leftrightarrow A^p U = U$ donc on a aussi l'inclusion inverse soit $\boxed{\ker(A^p - I_n) = Vect(U) \text{ et } \ker(A^p - I_n) \text{ droite vectorielle}}$ ■

11) On sait déjà que $Vect(U) \subset \ker(A - I_n)$ (Q6) et $AX = X \Leftrightarrow A^p X = X$ donc $\ker(A - I_n) \subset \ker(A^p - I_n) = Vect(U)$ d'où l'égalité $\boxed{\ker(A - I_n) = Vect(U)}$ ■

12) A étant stochastique, toutes ses puissances le sont et possèdent des coefficients positifs, il en résulte qu'il en va de même pour R_k, ce pour tout $k \geq 1$.

Or (k étant donné) $R_k U = \dfrac{1}{k}(\sum\limits_{l=0}^{k-1} A^l U) = \dfrac{1}{k}(\sum\limits_{l=0}^{k-1} U) = U$ (par stochasticité des puissance de A) donc

$\boxed{\forall k \geq 1, R_k \in \mathcal{E}}$ ■

13) Les deux premiers points découlent de Q5 et Q12 et Q8. Il reste à expliquer pourquoi P est de rang 1. Grâce à Q4/Q5, P est la matrice d'une projection de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ dont l'image est $\ker(A-I_n)$ qui est une droite vectorielle. Donc $\boxed{\text{rg(P)} = 1}$■

14) Puisque $\Im(P) = \ker(A - I_n) = Vect(U)$, il existe un unique n-uplet de réels $L = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$ tel que : $C_i(P) = \lambda_i U$, ce pour $1 \leq i \leq n$. Ces informations entraînent que $P = UL$ et le caractère stochastique de P implique celui de L■

15) Pour tout entier $k \geq 1, R_k A - R_k = \dfrac{1}{k}(A^k - I_n)$ donc en passant aux normes (inégalité triangulaire) : $\|R_k A - R_k\| \leq \dfrac{1}{k}(\|A^k\| + \|I_n\|)(\star)$.

Par ailleurs les matrices A^k étant stochastiques, leurs coefficients sont tous compris entre 0 et 1 donc la suite (A^k) est bornée donc, grâce à $(\star)$ et au théorème des gendarmes nous avons que la suite $(R_k A - R_k)$ converge vers 0_n donc (avec Q13 on sait que $R_k \to L$) que la suite $(R_k A)$ converge vers P mais elle converge aussi (compatibilité limite et produit matriciel) vers PA; l'unicité de la limite permet d'affirmer que $\boxed{PA = P}$■

L'égalité $PA = P$ est aussi (avec Q14) $U(LA - L) = 0_n$. Si $D = (d_1.....d_n)$ alors UD est la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ dont chaque ligne est D. Donc la relation $U(LA - L) = 0_n$ entraîne bien $LA = L$.

Inversement si $K \in M_{1,n}(\mathbb{R})$ vérifie $KA = K$, alors on a aussi (on pose H et B comme les transposées respectives de K et A) $BH = H$ or $rg(B - I_n) = rg(A - I_n) = 1$ donc nécessairement K est-elle colinéaire à L; si on exige de plus que K soit stochastique, $K = L$■

16) La relation $LA = L$ implique $LA^p = L$. Supposons que $\lambda_j = 0$ alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_{ij} = 0$; comme A^p est strictement stochastique, ceci entraînerait que tous les λ_i soient nuls : incompatible avec le caractère stochastique de L. Ainsi L est-elle à coefficients strictement positifs■

17) Considérons $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, vecteur propre de A et de vp associée $\mu \neq 1$. De l'égalité $LA = L$ nous déduisons $LAX = LX$ soit $(\mu - 1)LX = 0 \iff LX = 0$; X apparient à l'hyperplan (H) d'équation $\displaystyle\sum_{i}^{n} \lambda_i x_i = 0$.

Si on suppose que $X \in (H)$ alors $LAX = LX = 0$ donc $AX \in (H)$; ainsi (H) est-il stable par $f_A : X \to AX$ et il en va de même pour $Vect(U)$ dont on constate aisément qu'il est un supplémentaire dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$ de (H).

En notant g l'endomorphisme de (H) induit par f_A et b une base de H, on voit que la matrice de f_A dans la base (U, b) est $diag(1, M)$, où $M = M_b(g)$ donc le polynôme caractéristique de f_A est égal à $(\lambda - 1)(\chi_g(\lambda)$ (Tout ceci est du cours et a été détaille ici à dessein).

Imaginons que 1 ne soit pas valeur propre simple de A, alors 1 serait racine de χ_g et il existerait un vecteur propre de g (donc de f_A) associé à la valeur propre 1; celui-ci devrait donc appartenir à (H) et à Vect(U), ce que contredit sa non nullité■