Corrigé du concours blanc (DS5) (4 heures)

Avertissement : La rédaction, l'argumentation et la présentation matérielle entrent dans une part significative de la notation. Les résultats numériques seront encadrés et simplifiés. On rédigera avec soin. Les exercices sont indépendants. **Deux trajets sont proposés :** $(1,2,4,5,6)$ **(CCINP) et** $(3,4,5,6,7)$ **(Mines, Centrale). IL FAUDRA EN CHOISIR UN SEUL. PAS DE CALCULATRICES**

....

Exercice 1 : (Probabilités 1)

A Roland Garros, les déroulements des tournois féminin et masculin sont indépendants. On note A l'événement " une Française et un Français gagnent le tournoi", B l'événement " soit une Française gagne, soit c'est un Français" et C l'événement " les vainqueurs de ces deux tournois ne sont pas français".

1) Montrer qu'au moins un des trois événements A, B, C a une probabilité supérieure à $\dfrac{4}{9}$.

2) Lequel ?

Solution :1) On note F l'événement « une Française gagne le tournoi » et G l'événement « un Français gagne le tournoi »; F' (resp. G') est l'événement contraire de F (resp. G).

Si $\mathbb{P}(F) \geq 2/3$ et $\mathbb{P}(G) \geq 2/3$, comme $A = F \cap G$, il vient par indépendance $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(F)\mathbb{P}(G) \geq 4/9$.

Si $\mathbb{P}(F) \leq 1/3$ et $\mathbb{P}(G) \leq 1/3$, de $C = F' \cap G'$ (et, par proposition, de l'indépendance de F' et G') on tire $\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(F')\mathbb{P}(G') \geq (1-1/3)(1-1/3) = 4/9$.

Si $\mathbb{P}(F) \leq 1/3$ et $\mathbb{P}(G) \geq 2/3$ alors, puisque $B = (F \cap G') \cup (F' \cap G)$, on a (additivité car la réunion précédente porte sur deux éléments incompatibles) $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(F \cap G') + \mathbb{P}(F' \cap G) \geq \mathbb{P}(F' \cap G) = \mathbb{P}(F')\mathbb{P}(G)$ (indépendance) soit enfin $\mathbb{P}(B) \geq (1-1/3)2/3 = 4/9$.

Le dernier cas se traite comme le précédent■

2) Les probabilités ne peuvent bien sûr pas donner une telle information mais les statistiques (recensant les résultats médiocres des joueurs et joueuses français) inclinent à penser que C est un événement presque sûr■

....

....

Exercice 2 : (Analyse)

a) Nature de $\displaystyle\int_0^1 \ln(t^{-2024})dt$?

b) Nature de l'intégrale généralisée : $\displaystyle\int_0^{\infty} \ln(1+\frac{1}{t^{2024}})dt$?

Solution : a) L'intégrande est une fonction positive et continue sur $]0,1]$.

Pour tout $t \in]0,1], \ln(t^{-2024}) = -2024\ln(t)$ et $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)dt$ est une intégrale généralisée de référence convergente; de ceci il découle que $\displaystyle\int_0^1 \ln(t^{-2024})dt$ converge aussi ■

b) Posons, pour $t > 0$, $f(t) = \ln(1+\dfrac{1}{t^{2024}})$; f est continue et positive sur $\mathbb{R}_+^*$. Il y a donc deux bornes à problème : $0, +\infty$.

i) Nature de $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$?

On a, pour tout $t \to 0^+, f(t) = \ln(t^{-2024}) + \ln(t^{2024}+1) \sim \ln(t^{-2024})$ donc, par comparaison (les intégrandes étant positives) et a), $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$ converge.

ii) Nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)dt$? Avec l'équivalent usuel $\ln(1+x) \sim x$ pour $x \to 0$, il vient $f(t) \sim \dfrac{1}{t^{2024}}$ en $+\infty$.

Les intégrales de Riemann en cette borne assurent(par comparaison) la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)dt$.

Bilan : $\displaystyle\int_0^{\infty} \ln(1+\frac{1}{t^{2024}})dt$ converge ■

. . . .

. . . .

Exercice 3 : (Analyse)

1) Etablir que pour $x \to +\infty$: $ch(x) \sim \frac{e^x}{2}$, $sh(x) \sim \frac{e^x}{2}$ et $th(x) \to 1$.

On pose, sous réserve d'existence, $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{ch^{2n+2}(x)}$, ce pour $n \in \mathbb{N}$.

2) Justifier le bien-fondé de cette définition.

3) Calculer I_0.

4) Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} I_n$.

5) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \frac{2^{2n}}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$.

6) La série $\sum_{n\geq 0} I_n$ converge-t-elle?

Solution : 1) Comme $e^{-x} = o(e^x)$ pour $x \to +\infty$, les deux premiers équivalents sont immédiats. De plus (par quotient d'équivalents et dans le même contexte) : $th(x) \sim \frac{\frac{e^x}{2}}{\frac{e^x}{2}} = 1$ d'où la limite voulue■

2) Fixons un entier naturel n, la fonction $f : x \to \frac{1}{ch^{2n+2}(x)}$ est **positive** et continue sur $\mathbb{R}_+$.

En $+\infty$ (avec 1) $f(x) \sim \frac{e^{-(2n+2)x}}{2}$. Comme $2n+2 > 0$, l'intégrale généralisée (de référence) $\int_0^{+\infty} e^{-(2n+2)x} dx$ converge et, par comparaison il en va de même de $\int_0^{+\infty} f(x)dx$■

3) Le théorème fondamental généralisé du calcul intégral donne : $I_0 = [th(x)]_{x=0}^{x=+\infty} = 1 - 0 = 1$■

4) On procède à une intégration par parties en primitivant $x \to \frac{1}{ch^2(x)}$ et en dérivant $x \to \frac{1}{ch^{2n+2}(x)}$ (toutes les deux de classe C^∞) sur $\mathbb{R}$.

Sous réserve de l'existence du crochet généralisée nous avons :

$I_{n+1} = [\frac{th(x)}{ch^{2n+2}(x)}]_{x=0}^{x=+\infty} + (2n+2)\int_0^{+\infty} \frac{th(x)sh(x)dx}{ch^{2n+3}(x)}$. Ce qui peut se réecrire :

$I_{n+1} = [\frac{sh(x)}{ch^{2n+3}(x)}]_{x=0}^{x=+\infty} + (2n+2)\int_0^{+\infty} \frac{sh^2(x)dx}{ch^{2n+4}(x)}$.

Le crochet étant nul, notre initiative est validée et, en vertu de la relation classique $sh^2 = ch^2 - 1$, il en ressort bien la relation désirée■

5) Récurrence accessible avec un minimum de conviction■

6) La série en question étant à termes positifs, l'approche est multiple. Une d'entre elles serait le critère de d'Alembert mais on tombe sur le cas douteux.

La formule de Stirling donne, elle, $I_n \sim \frac{K}{\sqrt{n}}$, pour un $K > 0$ approprié; ainsi cette série diverge■

. . . .

. . . .

Exercice 4 : (Algèbre linéaire)

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 3$. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, on définit la matrice $M(a, b) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par :

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} b & a & a & \dots & a \\ a & b & a & \dots & a \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a & \dots & a & b & a \\ a & \dots & a & a & b \end{pmatrix}$$

et on note $P_{a,b}$ le polynôme caractéristique de la matrice $M(a, b)$. On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et on remarque que pour tous réels a et b,

$$M(a, b) = bI_n + aM(1, 0).$$

Q1. Montrer que $V = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ est un vecteur propre de $M(a, b)$ et déterminer la valeur propre associée à V.

Q2. Montrer que $P_{1,0}(X) = (X-(n-1))(X+1)^{n-1}$.

Q3. On suppose que $a \neq 0$. Montrer que $P_{a,b}(X) = a^n P_{1,0}\left(\dfrac{X-b}{a}\right)$. En déduire l'ensemble des valeurs propres de $M(a,b)$ ainsi que leurs multiplicités.

Q4. On définit le polynôme $Q_{a,b} \in \mathbb{C}[X]$ par $Q_{a,b}(X) = (X-(b-a))(X-(b+(n-1)a))$. Montrer que $Q_{a,b}$ est un polynôme annulateur de $M(a,b)$ et en déduire que $M(a,b)$ est diagonalisable (on distinguera les cas $a=0$ et $a \neq 0$).

Q5. Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose que $a \neq 0$. Déterminer le reste de la division euclidienne du polynôme X^k par le polynôme $Q_{a,b}$ et en déduire une expression de $M(a,b)^k$ comme combinaison linéaire de $M(a,b)$ et de I_n.

Q6. Supposons que $|b-a| < 1$ et $|b+(n-1)a| < 1$. Déterminer la limite de la suite de matrices $\left(M(a,b)^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$.

Solution : 1) On a deux choses : $V \neq 0_{n,1}$ puis $M(a,b)V = (b+(n-1)a)V$ donc V est bien une colonne (vecteur) propre de $M(a,b)$, de vp associée $b+(n-1)a$■
2)

$$P_{1,0}(x) = \begin{vmatrix} x & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-(n-1) & -1 & \cdots & -1 \\ x-(n-1) & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ x-(n-1) & \cdots & -1 & x \end{vmatrix} \left(C_1 \leftarrow \sum_{i=1}^n C_i\right)$$
$$= \begin{vmatrix} x-(n-1) & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & x+1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & x+1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\ \vdots \\ (L_n \leftarrow L_n - L_1) \end{array}$$

C'est le déterminant d'une matrice triangulaire: il se calcule donc en faisant le produit des coefficients diagonaux. De là on déduit facilement: $P_{1,0}(X) = (X-(n-1))(X+1)^{n-1}$. D'où le résultat■
3)
L'énoncé nous invite à remarquer que l'on a: $M(a,b) = b\mathrm{I}_n + aM(1,0)$. On en déduit, pour tout $x \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} P_{a,b}(x) = \det(x\mathrm{I}_n - M(a,b)) &= \det(x\mathrm{I}_n - b\mathrm{I}_n - aM(1,0)) \\ &= \det((x-b)\mathrm{I}_n - aM(1,0)) \\ &= \det\left(a\left(\frac{x-b}{a}\mathrm{I}_n - M(1,0)\right)\right) \\ &= a^n \det\left(\frac{x-b}{a}\mathrm{I}_n - M(1,0)\right) \\ &= a^n P_{1,0}\left(\frac{x-b}{a}\right), \end{aligned}$$

d'où: $P_{a,b}(X) = a^n P_{1,0}\left(\dfrac{X-b}{a}\right)$. On en déduit, grâce à la question précédente:

$$P_{a,b}(X) = a^n \left(\frac{X-b}{a} - (n-1)\right)\left(\frac{X-b}{a} + 1\right)^{n-1} = (X-b-(n-1)a)\,(X-b+a)^{n-1}.$$

On en déduit que les valeurs propres de $M(a,b)$ sont $b+(n-1)a$ (qui est d'ordre de multiplicité 1) et $b-a$ (qui est d'ordre de multiplicité $n-1$).
On a bien $b-(n-1)a \neq b-a$, puisque l'égalité équivaut à $na=0$, or on a supposé a non nul■
4)Commençons par observer que (simple calcul) : $(M(1,0)+I_n)^2 = n(M(1,0)+I_n)$ donc $(M(1,0)+I_n)(M(1,0)-(n-1)I_n) = 0_n$ soit $Q(1,0)(M(1,0)) = 0_n$.
Voyons comment en déduire que $Q_{a,b} = (X-(b-a))(X-(b+(n-1)a))$ est un polynôme annulateur de

$M(a,b)$. On rappelle que l'on a: $M_{a,b} = b\mathrm{I}_n + aM(1,0)$. Donc:

$$\begin{aligned}
Q_{a,b}(M_{a,b}) &= (M(a,b) - (b-a)\mathrm{I}_n)\,(M(a,b) - (b+(n-1)a)\mathrm{I}_n) \\
&= (b\mathrm{I}_n + aM(1,0) - (b-a)\mathrm{I}_n)\,(b\mathrm{I}_n + aM(1,0) - (b+(n-1)a)\mathrm{I}_n) \\
&= (aM(1,0) + a\mathrm{I}_n)\,(aM(1,0) - (n-1)a\mathrm{I}_n) \\
&= a^2\,(M(1,0) + \mathrm{I}_n)\,(M(1,0) - (n-1)\mathrm{I}_n) \\
&= 0_n,
\end{aligned}$$

d'où le résultat: $Q_{a,b}$ est un polynôme annulateur de $M(a,b)$. On va en déduire que $M(a,b)$ est diagonalisable pour tout $(a,b) \in \mathbb{C}^2$:

- si $a = 0$, alors $M(0,b) = b\mathrm{I}_n$, qui est diagonale donc diagonalisable;
- si $a \neq 0$, alors $Q_{a,b}$ est un polynôme annulateur de $M(a,b)$, scindé, et à racines simples parce que $b - a \neq b + (n-1)a$ (en effet $b - a = b + (n-1)a$ si et seulement si $na = 0$, si et seulement si $a = 0$, mais on a supposé le contraire), donc par le critère polynomial de diagonalisation $M(a,b)$ est diagonalisable■

  5) Cette division peut s'écrire $X^k = Q(a,b)D + R$, où $R = uX + v$ $(u,v) \in \mathbb{C}^2$. On spécialise alors en les racines de $Q(a,b)$, que nous notons λ et μ (rappelons qu'ici elles sont distinctes) cette égalité polynomiale; ce qui donne les informations suivantes : $\lambda^k = u\lambda + v$ et $\mu^k = u\mu + v$ et permet d'obtenir $\boxed{R = \dfrac{1}{\lambda - \mu}((\lambda^k - \mu^k)X + \lambda\mu^k - \mu\lambda^k)}$

  De $X^k = Q(a,b)D + R$ on déduit (en posant $M = M(a,b)$) : $\forall k \in \mathbb{N}, M^k = Q(a,b)(M)D(M) + R(M) = 0_n D(M) + R(M) = R(M) = \boxed{\dfrac{1}{\lambda - \mu}((\lambda^k - \mu^k)M + (\lambda\mu^k - \mu\lambda^k)I_n)}$■

  6) La question précédente et le fait que les suite (λ^k) et $(\mu^k))$ convergent vers 0 donnent, par caractérisation de la convergence des suites de matrices via les suites de leurs coefficients, $\boxed{M(a,b)^k \underset{k\to\infty}{\to} 0_n}$■

  ....

  ....

  Exercice 5 : (Algèbre linéaire)

  Notations pour cet exercice :

  $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

  On désigne, pour n entier naturel, $n \geq 2$:

- $M_n(\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Décomposition de Dunford

On admet le théorème suivant que l'on pourra utiliser librement :

> Si A est une matrice de $M_n(\mathbb{K})$ telle que son polynôme caractéristique χ_A soit scindé sur $\mathbb{K}$, alors il existe un unique couple (D,N) de matrices de $M_n(\mathbb{K})$ vérifiant les quatre propriétés suivantes :
>
> (1) $A = D + N$;
>
> (2) D est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{K})$ (pas nécessairement diagonale) ;
>
> (3) N est nilpotente ;
>
> (4) $DN = ND$.
>
> De plus, D et N sont des polynômes en A et $\chi_A = \chi_D$.
> Le couple (D,N) s'appelle la décomposition de Dunford de A.

Partie I - Un exemple

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A.
On notera Id l'application identité de $\mathbb{R}^3$.

Q1. La matrice A est-elle diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$?
Démontrer qu'on a la somme directe : $\mathbb{R}^3 = Ker(u - Id) \oplus Ker(u - 2Id)^2$.

Q2. Déterminer une base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que :
$Ker(u - Id) = Vect\{e_1\}, Ker(u - 2Id) = Vect\{e_2\}, Ker(u - 2Id)^2 = Vect\{e_2, e_3\}$.
Ecrire la matrice B de u dans la base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$.

Q3. Déterminer le couple de la décomposition de Dunford de la matrice B et en déduire le couple (on calculera ces matrices) de la décomposition de Dunford de la matrice A.

Partie II - Une preuve de l'unicité de la décomposition

Q4. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.
Soient u et v deux endomorphismes diagonalisables de E qui commutent. On note $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres de u et pour tout $1 \leq i \leq p$, $E_{\lambda_i}(u)$ le sous-espace propre de u associé à la valeur propre λ_i.
a) Démontrer que tout sous-espace propre de u est stable par v.
Pour tout $1 \leq i \leq p$, on pourra noter v_i l'endomorphisme induit par v sur $E_{\lambda_i}(u)$.
b) Prouver que chaque v_i est diagonalisable.
En déduire qu'il existe une base commune de diagonalisation pour u et v.

Q5. Soient A et B deux matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{K})$ qui commutent. Démontrer que la matrice $A - B$ est diagonalisable en utilisant la question précédente.

Q6. Soient A et B deux matrices nilpotentes de $M_n(\mathbb{K})$ qui commutent.
a) Etablir que $A^n = B^n = 0_n$.
b) Prouver que pour tout entier naturel k, $0 \leq k \leq 2n$, $A^k B^{2n-k} = 0_n$.
c) En déduire que la matrice $A - B$ est nilpotente.

Q7. Déterminer les matrices de $M_n(\mathbb{K})$ qui sont à la fois diagonalisables et nilpotentes.

Q8. Dans cette question, on admet, pour toute matrice carrée A de $M_n(\mathbb{K})$ à polynôme caractéristique scindé, l'existence d'un couple (D, N) vérifiant les conditions (1), (2), (3), (4) et tel que D et N soient des polynômes en A.
Etablir l'unicité du couple (D, N) dans la décomposition de Dunford.
Solution :1) On ajoute C_2 à C_1 dans $det(\lambda I_3 - A)$ ce qui permet de mettre $(\lambda - 2)$ en facteur et donne $\chi_A = (\lambda - 2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & \lambda & -1 \\ 0 & 1 & \lambda - 2 \end{vmatrix}$.
On ajoute C_1 à C_3 et on développe alors suivant la dernière colonne pour obtenir : $\boxed{\chi_A = (\lambda - 2)^2(\lambda - 1)}$.
A (donc u) est sûrement trigonalisable puisque son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$; on voit aisément (écrire la matrice) que le rang de $A - 2I_3$ vaut 2 donc que $dim(Ker(A - 2I_3) = 1 \neq 2 = m(2)$. $\boxed{\text{Ainsi } A \text{ et } u \text{ ne sont pas diagonalisables}}$.
On détermine ces noyaux (en vue de résoudre dans la foulée une partie de Q2), on trouve :
$\boxed{Ker(u - Id) = Vect((0, 1, 1) = e_1)}$ et $\boxed{Ker(u - 2Id)^2 = Vect((1, 1, 0) = e_2; (0, 0, 1) = e_3)}$ (Pour le second noyau il faut calculer $(A - 2I_3)^2$; on trouve $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.)
Comme $det(e_1, e_2, e_3) = -1 \neq 0$, (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ et ceci donne bien que : $\boxed{\mathbb{R}^3 = Ker(u - Id) \oplus Ker(u - 2Id)^2}$ ■
2) Partiellement résolue en Q1. On vérifie sans peine que $Ker(u - 2Id) = Vect(e_2)$ et on obtient $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. La dernière colonne vient du fait (utiliser la troisième colonne de A) que $u(e_3) = (1, 1, 2) = e_2 + 2e_3$■

3) On pose alors $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = B - D$, on vérifie que $ND = DN = 2N$ et comme N est nilpotente le couple (D,N) est bien le couple de Dunford de B.
Notons P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base (e_1, e_2, e_3), on a donc $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = PBP^{-1} = PDP^{-1} + PNP^{-1}$. Posant $\Delta = PDP^{-1}$ et $\Omega = PNP^{-1}$, il vient que la première de ces matrices est dz (car semblable à une matrice diagonale), la seconde nilpotente (son carré est la matrice nulle) puis que ces matrices commutent puisque $DN = ND$ et qu'enfin leur somme est égale à A. En résumé (Δ, Ω) est le couple de Dunford de A.
La matrice de passage de la base (e_1, e_2, e_3) à la base canonique est $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; on trouve alors $\Omega = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ puis $\Delta = A - \Omega = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ ■
4) a) Voir votre cours■
b) v étant dz, il possède un polynôme annulateur scindé et à racines simples qui est aussi un polynôme annulateur de v_i donc ce dernier est bien diagonalisable.
Notons b_i une base (de $E_{\lambda_i}(u)$ donc) de diagonalisation de v_i, ce pour $1 \leq i \leq p$ et posons b comme la concaténation de ces p familles.
Pour chaque i, b_i est constituée de vecteurs propres de u (car tous ces éléments sont dans $E_{\lambda_i}(u)$ et de v_i donc de v.
u étant dz, on a $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u)$ donc b est une base de E faite de vecteurs propres de u et de v■
5) Il suffit de traduire matriciellement la question précédente. Notons u et v les endomorphismes canoniquement associés respectivement à A et B et notons P la matrice de passage de la base canonique à une base commune de diagonalisation pour u et v. Ceci signifie qu'il existe deux matrices diagonales D et D' de $M_n(\mathbb{K})$ telles que $A = PDP^{-1}$ et $B = PD'P^{-1}$. Dès lors $A - B = P(D - D')P^{-1}$; ce qui montre bien que $A - B$ est diagonalisable■
6)a) Voir votre cours■
b) Si $k \geq n$ alors $A^k = 0_n$ et si $k < n$ alors $2n - k \geq n$ donc $B^{2n-k} = 0_n$ d'où l'assertion■
c) A et B commutant on peut utiliser le binôme de Newton pour évaluer les puisssances de $A - B$. Plus précisément : $(A - B)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^k A^k B^{2n-k} = 0_n$ par la question précédente. $A - B$ est bien nilpotente■
7) Il s'agit de la seule matrice nulle. Voir votre cours■
8) Donnons nous deux couples (D, N) et (D', N') de Dunford de la matrice A. On a donc $D - D' = N' - N$. Comme toutes ces matrices sont des polynômes en A, elles commutent deux à deux. Par ce qui précède (Q5 et Q6), $D - D'$ est donc à la fois dz et nilpotente donc nulle par Q7. Ainsi $D = D'$ et donc $N = N'$■

....
....

Exercice 6 : (Analyse)

On considère deux suites (a_n) et (b_n)à termes réels et on pose, pour tout réel x, et tout n :
$u_n(x) = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$.
1) Montrer que si les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent absolument, la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.
2) Prouver à l'aide d'un contre-exemple que la convergence des séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ ne suffit pas à assurer le résultat précédent.
3) On se donne deux réels a, b, prouver que le maximum sur $\mathbb{R}$ de $x \to |a \cos x + b \sin x|$ est $\sqrt{a^2 + b^2}$. 3) On suppose ici que $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, établir que les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent absolument.

Désormais on suppose que $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

On note f la somme de la série de fonctions $\sum u_n$.
4) Prouver que f est continue sur $\mathbb{R}$ et $2\pi-$ périodique.
On rappelle que : pour tout $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$:
$\cos^2 c=\dfrac{1+\cos 2c}{2}, \cos a\cos b=\dfrac{1}{2}(\cos(a+b)+\cos(a-b))$.

5) Calculer $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(nx)dx$ pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos px\cos qxdx$, où $p\neq q$ sont des entiers naturels.

Soit q un entier naturel; on pose, pour tout réel x et tout entier naturel n : $v_n(x)=u_n(x)\cos(qx)$.
6) a) Etablir la convergence normale sur $[-\pi,\pi]$ de la série de fonctions $\sum v_n$.
b) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(qx)dx$.
Solution : 1) Pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout réel x, $|u_n(x)|\leq|a_n|+|b_n|$.
La convergence absolue des séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ donne la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}(|a_n|+|b_n|)$; la convergence normale sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\sum u_n$ en découle■
2) Prenons pour tout n : $a_n=\dfrac{(-1)^n}{n+1}$ et $b_n=0$ alors la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}u_n(\pi)$ est divergente (série harmonique) donc il n'y a même pas convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\sum u_n$■
3) Si a ou b nul, c'est évident. On suppose que ce n'est donc pas le cas; pour tout réel x, il vient : $(a^2+b^2)-(a\cos x+b\sin x)^2=a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x-2ab\sin x\cos x=(a\sin x-b\cos x)^2$. Ceci montre donc que : $\forall x\in\mathbb{R}, |a\cos x+b\sin x|\leq\sqrt{a^2+b^2}$ et qu'il y a égalité dans cette inégalité ssi $a\sin x=b\cos x$. Cette égalité est donc assurée si $\tan x=\dfrac{b}{a}$ donc, par exemple, pour $x=\arctan(\dfrac{b}{a})$; Ainsi $\sqrt{a^2+b^2}$ est bien le maximun sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x\to|a\cos x+b\sin x|$■
3bis) Par définition la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}||u_n||_\infty$ est donc convergente. Ce qui signifie, via la question précédente que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\sqrt{a_n^2+b_n^2}$ converge.
Mais $\forall n, 0\leq|a_n|(resp.|b_n|)\leq\sqrt{a_n^2+b_n^2}$, ainsi, par domination, les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent absolument■
4) Chaque u_n étant continue sur $\mathbb{R}$, la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 0}u_n$ convergeant normalement sur $\mathbb{R}$, on peut appliquer le théorème C^0 pour les séries de fonction qui nous garantit la continuité sur $\mathbb{R}$ de la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ de notre série de fonctions. Autrement dit f est continue sur $\mathbb{R}$.
La 2π périodicité de f provient clairement de celle de chaque u_n■
5) En utilisant les formules données, il vient facilement : $\boxed{\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(nx)dx=\pi}$, ce pour tout n entier non nul; et $\boxed{\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos px\cos qxdx=0}$, pour tout couple (p,q) d'entiers naturels tel que $p\neq q$■
6)a) Pour tout réel x et tout entier n, $|v_n(x)|\leq|u_n(x)|\leq||u_n||_\infty$; la CVN sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 0}u_n$ entraîne alors celle de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 0}v_n$ sur $\mathbb{R}$ donc celle sur le segment $[-\pi,\pi]$■
b) On pose V comme étant la somme de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 0}v_n$; le théorème d'intégration terme à terme sur le le segment $[-\pi,\pi]$, appliqué à cette série de fonctions continues sur ce segment, nous dit que : $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}V(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}v_n(x)dx$.
Or, pour tout réel x, $V(x)=f(x)\cos(qx)$ et, pour tout n, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}v_n(x)dx=a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\cos(qx)dx+ b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\cos(qx)dx=a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\cos(qx)dx$, ce par imparité de la dernière intégrande.

Avec Q5 nous avons pour tout entier $n \neq q$, $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(qx)dx = 0$, donc $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(qx)dx = a_q \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(qx)dx = \begin{cases} \pi a_q & \text{si } q \neq 0 \\ 2\pi a_0 & \text{sinon} \end{cases}$ ■

....

....

Exercice 7 : (Probabilités 2)
On se place dans l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et on considère une suite d'événements (A_n).

Pour tout entier naturel n, nous poserons $D_n = \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$.

Enfin A désigne $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} D_n$.

PARTIE A

1) Prouver que A est un événement.
On rapelle que si B est un événement, ceci peut se traduire par B est réalisé.
2) Etablir alors que A est l'événement : " il y a une infinité d'indices i tels que A_i soit réalisé ".

PARTIE B

On suppose dans cette partie que la série $\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(A_n)$ converge.
3) Enoncer précisément l'inégalité de Boole.
4) Vérifier que $\mathbb{P}(D_n) \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0$.
5) En déduire $\mathbb{P}(A)$.

PARTIE C

On suppose maintenant que (A_n) est une suite d'événements mutuellement indépendants et que la série $\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(A_n)$ diverge.
Afin d'allèger les notations, nous notons B_n comme étant l'événement contraire de A_n et ce pour tout entier naturel n.
6) Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall N \geq n, \mathbb{P}(\bigcap_{k=n}^{N} B_k) \leq \exp(-\sum_{k=n}^{N} \mathbb{P}(A_k)$.
7) En déduire $\mathbb{P}(A)$.
8) A l'aide d'un contre-exemple simple vérifier que la mutuelle indépendance est nécessaire pour garantir le résultat précédent.

PARTIE D

d désigne un entier compris entre 1 et 3 et on note O_d l'origine de $\mathbb{R}^d$.
Une particule se déplace dans l'espace $\mathbb{R}^d$, elle se trouve à l'instant $t = 0$ en O_d puis, à chaque instant $t = n, n \in \mathbb{N}$, elle se trouve en un point M_n à coordonnées entières. Elle passe avec équiprobabilité à l'un des 2^d points obtenus à partir de M_n en faisant varier **chacune** de ses coordonnées de ± 1.
E_n est l'événement "la particule est, à l'instant n, en O_d".
9) Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(E_{2n+1}) = 0$.
10) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(E_{2n}) = (\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}})^d$.
11) Pouvez vous accréditer cet aphorisme d'un mathématicien russe ou soviétique (et néanmoins non dénué d'humour) : il est plus probable qu'un ivrogne rentre chez lui après une beuverie qu' un oiseau après une légitime course pour nourrir son nid?
12) Expliquer le "paradoxe" du singe dactylographe d'Emile Borel : un singe tape au hasard sur une machine à écrire; l'événement : "il tape une infinité de fois les trois mousquestaires (ou tout autre roman)" est presque sûr.

Solution :1) On sait que la réunion et l'intersection dénombrables d'événements en sont encore un. Ainsi $\boxed{\text{A est un événement}}$■
2) Envisageons plutôt l'événement contraire de "M" : " il y a une infinité d'indices i tels que A_i soit réalisé "; il s'agit de l'événement : il existe un entier n tel que pour chaque entier $k \geq n$ A_k ne soit pas réalisé. Autrement dit $\overline{M} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\bigcap_{k\geq n} \overline{A_k})$ donc en repassant à l'événement contraire on trouve bien $A = M$■
3) Cours■

4) Par l'inégalité de Boole $0 \leq P(D_n) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}(A_k)$; on reconnaît en le terme majorant le reste d'ordre $n-1$ d'une série convergente; le théorème des gendarmes donne alors $\mathbb{P}(D_n) \underset{n\to\infty}{\to} 0$■
5) La suite (D_n) est une suite décroissante pour l'inclusion donc le théorème de continuité décroissante assure aussi $\mathbb{P}(D_n) \underset{n\to\infty}{\to} \mathbb{P}(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} D_n) = \mathbb{P}(A)$. Par unicité limite, il vient $\boxed{\mathbb{P}(A) = 0}$■
6) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall N \geq n, \mathbb{P}(\bigcap_{k=n}^{N} B_k) = \prod_{k=n}^{N} P(B_k)$, ce par indépendance mutuelle de la famille (A_n) (donc (B_n) par le cours); on en déduit donc que $\mathbb{P}(\bigcap_{k=n}^{N} B_k) = \prod_{k=n}^{N}(1-\mathbb{P}(A_k)) \leq \prod_{k=n}^{N} exp(-\mathbb{P}(A_k))$ (inégalité de convexité $x+1 \leq e^x$, pour tout réel x). Soit enfin $\mathbb{P}(\bigcap_{k=n}^{N} B_k) \leq \exp(-\sum_{k=n}^{N} \mathbb{P}(A_k))$■
7) Par gendarmes (ce pour tout n et $N \to \infty$, les sommes partielles d'une STP divergente tendent vers $+\infty$), nous obtenons(à partir de la question précédente) que $\mathbb{P}(\bigcap_{k=n}^{N} B_k) \to 0$ si $N \to \infty$. En utilisant à nouveau le théorème de continuité décroissante et l'unicité de la limite, nous en déduisons que $\boxed{\mathbb{P}(\bigcap_{k=n}^{\infty} B_k) = 0}$, ce pour tout n.
Il en résulte que chaque D_n est presque certain donc leur réunion aussi (cf cours ou....) donc $\boxed{\mathbb{P}(A) = 1}$■
8) Prenons pour tous les A_n un même événement C de probabilité $1/2$; la série $\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(A_n)$ diverge grossièrement mais $\mathbb{P}(A) = 1/2$ puisque $A = C$■
9) Un nombre impair de déplacements à partir de l'instant 0 entraîne un ajout d'un nombre impair de ± 1 aux coordonnées de O_d donc pour cette nouvelle position aucune de ses coordonnées n'est nulle d'où E_{2n+1} est l'événement impossible■
10) Posons $M_n = (x_{1,n}, ..., x_{d,n}$, ce pour tout n; $E_2n = \bigcup_{i=1}^{d} B_{i,n}$, où $B_{i,n}$ est l'événement $x_{i,n} = 0$ (i.e la i-ième coordonnée de M_n est nulle). Ces événements sont mutuellement indépendants et ont même probabilité ainsi $\boxed{\mathbb{P}(E_{2n}) = (\mathbb{P}(B_{1,n}))^d}$.
On est donc ramené au cas $d = 1$, la particule se déplace à partir de l'origine O avec des déplacements équiprobables de ± 1. E_{2n} peut se voir comme la réunion de tous les trajets entre les instants 0 et $2n$ comportant n déplacements exactement vers la droite; chaque trajet ayant la même probabilité à savoir $\boxed{\frac{1}{2^{2n}}}$.
Il nous suffit de dénombrer de tels déplacements : il y en a autant que de parties à n éléments dans un ensemble à $2n$ éléments (les déplacements vers la droite étant placés, le trajet est déterminé) soit $\boxed{\binom{2n}{n}}$.

Par additivité, il vient (pour $d = 1$) $\boxed{\mathbb{P}(E_{2n}) = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}}$; la réponse générale vient des considérations précédentes■
11) La formule de Stirling donne $\frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$, pour $n \to \infty$.
Ainsi pour $d = 1$ et $d = 2$ la série $\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(E_n)$ diverge mais converge pour $d \geq 3$ (avec critère de Riemann). L'événement A de l'énoncé défini avec $A_n \leftarrow E_n$ est alors quasi certain pour le premier cas (d =2 pour l'ivrogne) et négligeable dans le second (d = 3 pour l'oiseau) d'où un semblant d'explication de cette boutade■
12) On suppose que le clavier de la machine à écrire comporte m touches et que le roman de Dumas contient $N >> m$ lettres.
Pour tout entier $n \geq 1$, on note A_n l'événement : le singe tape les trois mousquetaires entre le $n+(n-1)N$ -ième essai et le $n+nN$ -ième essai; compte tenu du caractère anarchique des essais

pratiqués par l'animal, ces événements sont mutuellement indépendants et possèdent la même probabilité à savoir $(\dfrac{1}{m})^N$; il s'ensuit que la série $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(A_n)$ diverge (grossièrement) donc que A est un événement presque certain **QED**