Devoir surveillé n° 4

Durée : 3 heures. Calculatrices non autorisées.
La notation tiendra largement compte de la qualité de la rédaction.
Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre souhaité.
Les exercices qui ne sont pas traités dans l'ordre doivent être rédigés sur des copies séparées.
Le sujet et le brouillon ne sont pas à rendre. Le barème est indicatif.

Exercice 1. *(6 points)* On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. (a) Montrer que P est inversible, et déterminer P^{-1}.
   (b) On pose $\Delta = P^{-1}AP$. Montrer que $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.
2. On considère l'équation $(E)\ :\ D^2 - 6D = \Delta$, d'inconnue $D \in M_3(\mathbb{R})$.
   Résoudre (E) dans le cas où D est diagonale.
3. On considère l'équation $(E')\ :\ M^2 - 6M = A$, d'inconnue $M \in M_3(\mathbb{R})$.
   (a) Décrire les solutions de (E') en fonction des solutions de (E).
   (b) Détailler le calcul d'une seule des solutions de (E').

Exercice 2. *(6 points)* On considère l'équation différentielle (E) : $y^{(4)} = y$.
On munit (E) des conditions initiales : $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 2$, $y^{(3)}(0) = 3$.

1. On pose $z = y'' + y$.
   Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution de (E') : $z'' = z$.
2. Déterminer les conditions initiales associées à (E').
3. Résoudre (E') (en tenant compte des conditions initiales).
4. Résoudre (E) (en tenant compte des conditions initiales).

Exercice 3. *(6 points)*

1. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, et soit f une fonction dérivable strictement monotone sur $[0, a]$.
   (a) Justifier que f réalise une bijection de $[0, a]$ dans un intervalle J à déterminer.
   On note g sa bijection réciproque.
   (b) Soit $x \in [0, a]$. Appliquer le changement de variables $u = g(t)$ à l'intégrale $\displaystyle\int_{f(0)}^{f(x)} g(t)dt$.
   (c) En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, la *formule de Laisant* :
   $$\forall x \in [0, a], \quad \int_0^x f(t)dt + \int_{f(0)}^{f(x)} g(t)dt = xf(x).$$
2. En utilisant cette formule, déterminer les primitives de $\arccos$.
3. (a) Montrer que $f : x \mapsto xe^x$ réalise une bijection de $[0, 1]$ dans un intervalle J à déterminer.
   (b) On note φ sa bijection réciproque. Déterminer $\displaystyle\int_J \varphi$.

Problème. *(12 points)* On souhaite résoudre l'équation différentielle :

$$(E)\ :\quad y''' - 5y'' + 8y' - 4y = 36e^{5t} + \frac{9}{8}e^{\frac{t}{2}}.$$

I. On note (E_0) l'équation homogène associée à (E).

Soit y une fonction trois fois dérivable, et soit $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix}$.

1. Montrer que y est solution de (E_0) si et seulement si $Y' = AY$, avec : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -8 & 5 \end{pmatrix}$.
2. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible, et déterminer P^{-1}.
3. Montrer que $P^{-1}AP = T$, avec : $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
4. On pose $Z = P^{-1}Y$. Montrer que y est solution de (E_0) si et seulement si $Z' = TZ$.
5. On pose $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$. Résoudre $Z' = TZ$.
6. En déduire l'ensemble des solutions de (E_0).

II.
1. Résoudre l'équation différentielle $(F_1)\ :\ 8y' - 4y = 36e^{5t}$.
2. Résoudre l'équation différentielle $(F_2)\ :\ y''' - 5y'' = \frac{9}{8}e^{\frac{t}{2}}$.
3. Montrer que (F_1) et (F_2) admettent une unique solution commune, et déterminer cette solution.
4. En déduire une solution particulière de (E).

III. Conclure.